

# Formelsammlung zur VO

## 835.100 Mathematik für LMBT

### 1. Arithmetik

#### Einfache Identitäten

$$a^2 - b^2 = (a + b)(a - b)$$

$$a^3 - b^3 = (a - b)(a^2 + ab + b^2)$$

$$a^3 + b^3 = (a + b)(a^2 - ab + b^2)$$

$$a^n - b^n = (a - b)(a^{n-1} + a^{n-2}b + \dots + b^{n-1})$$

$$1 - x^n = (1 - x)(1 + x + x^2 + \dots + x^{n-1})$$

**Faktorielle**  $0! = 1, n! = 1 \cdot 2 \cdot \dots \cdot n \quad (n = 1, 2, \dots)$

#### Binomialkoeffizienten

$$\binom{\alpha}{k} = \frac{\alpha(\alpha-1)\dots(\alpha-k+1)}{k!}, \alpha \in \mathbb{R} \text{ (beliebig!)}, k = 0, 1, 2, \dots$$

**Binomischer Lehrsatz**  $(a + b)^n = \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} a^k b^{n-k}$

### 2. Vektoren und Matrizen

#### Skalarprodukt

$$\begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \\ a_3 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ b_3 \end{pmatrix} = a_1 b_1 + a_2 b_2 + a_3 b_3$$

#### Länge eines Vektors

$$\|\vec{a}\| = \sqrt{\vec{a} \cdot \vec{a}}$$

#### Vektorprodukt (Kreuzprodukt)

$$\begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \\ a_3 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ b_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_2 b_3 - a_3 b_2 \\ -(a_1 b_3 - a_3 b_1) \\ a_1 b_2 - a_2 b_1 \end{pmatrix}$$

#### Geometrische Interpretation von Skalarprodukt und Kreuzprodukt

$$\vec{a} \cdot \vec{b} = \|\vec{a}\| \cdot \|\vec{b}\| \cos \gamma \quad (\gamma \text{ eingeschlossener Winkel})$$

$$\|\vec{a} \times \vec{b}\| = \|\vec{a}\| \cdot \|\vec{b}\| \cdot |\sin \gamma| \quad (\gamma \text{ eingeschlossener Winkel})$$

#### Determinanten

$$\det \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} = \begin{vmatrix} a & b \\ c & d \end{vmatrix} = ad - bc.$$

$$\det \begin{pmatrix} a & b & c \\ d & e & f \\ g & h & i \end{pmatrix} = \begin{vmatrix} a & b & c & a & b \\ d & e & f & d & e \\ g & h & i & g & h \end{vmatrix} = aei + bfg + cdh - (gec + hfa + idb)$$

(Regel von SARRUS), oder („Spatprodukt“):

$$\det \begin{pmatrix} a & b & c \\ d & e & f \\ g & h & i \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a \\ d \\ g \end{pmatrix} \cdot \left( \begin{pmatrix} b \\ e \\ h \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} c \\ f \\ i \end{pmatrix} \right)$$

### 3. Funktionen

#### Nullstellen quadratischer Polynome

$$x^2 + px + q = 0 \implies x_{1,2} = -\frac{p}{2} \pm \sqrt{\left(\frac{p}{2}\right)^2 - q}.$$

**Logarithmus**  $y = \ln x \iff e^y = x$

$$\ln(xy) = \ln x + \ln y, \quad \ln \frac{x}{y} = \ln x - \ln y \quad (x, y > 0)$$

$$\ln(x^r) = r \ln x, \quad (r \in \mathbb{R}), \quad \ln \sqrt[n]{x} = \frac{1}{n} \ln x, \quad (n \in \mathbb{N}^*)$$

$$\ln e = 1, \quad \ln 1 = 0$$

#### Winkelfunktionen

$$(\cos x)^2 + (\sin x)^2 = 1, \text{ kurz: } \cos^2 x + \sin^2 x = 1$$

$$\sin(-x) = -\sin x, \quad \cos(-x) = \cos x$$

$$\tan x = \frac{\sin x}{\cos x}, \quad \cot x = \frac{\cos x}{\sin x}$$

$$\frac{1}{\cos^2 x} = 1 + \tan^2(x), \quad \frac{-1}{\sin^2 x} = -1 - \cot^2(x)$$

#### Wichtige Werte der Winkelfunktionen

$x$ (Gradmaß)	0	30	45	60	90	180	270	360
$x$ (Bogenmaß)	0	$\frac{\pi}{6}$	$\frac{\pi}{4}$	$\frac{\pi}{3}$	$\frac{\pi}{2}$	$\pi$	$\frac{3\pi}{2}$	$2\pi$
$\sin x$	0	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{\sqrt{2}}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	1	0	-1	0
$\cos x$	1	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{1}{\sqrt{2}}$	$\frac{1}{2}$	0	-1	0	1
$\tan x$	0	$\frac{1}{\sqrt{3}}$	1	$\sqrt{3}$	-	0	-	0
$\cot x$	-	$\sqrt{3}$	1	$\frac{1}{\sqrt{3}}$	0	-	0	-

#### Additionstheoreme der Winkelfunktionen

$$\sin(\alpha + \beta) = \sin \alpha \cos \beta + \sin \beta \cos \alpha$$

$$\cos(\alpha + \beta) = \cos \alpha \cos \beta - \sin \alpha \sin \beta$$

$$\sin(2\alpha) = 2 \sin \alpha \cos \alpha, \quad \cos(2\alpha) = \cos^2 \alpha - \sin^2 \alpha$$

### 4. Differential- und Integralrechnung

#### Ableitungen/Stammfunktionen wichtiger Funktionen

(c ist auf jedem maximalen im Definitionsbereich enthaltenen Intervall konstant)

$f(x)$	$f'(x)$	$f(x)$	$\int f(x) dx$
$x^a$	$ax^{a-1}$	$x^b \quad (b \neq -1)$	$\frac{x^{b+1}}{b+1} + c$
$\sin x$	$\cos x$	$\frac{1}{x}$	$\ln  x  + c$
$\cos x$	$-\sin x$	$\cos x$	$\sin x + c$
$\tan x$	$\frac{1}{\cos^2 x}$	$\sin x$	$-\cos x + c$
$\cot x$	$\frac{-1}{\sin^2 x}$	$\frac{1}{\sqrt{a^2-x^2}}$	$\arcsin \frac{x}{a} + c$
$\ln x$	$\frac{1}{x}$	$\frac{1}{\sqrt{x^2+b}}$	$\ln  x + \sqrt{x^2+b}  + c$
$e^x$	$e^x$	$\frac{1}{a^2+x^2}$	$\frac{1}{a} \arctan \frac{x}{a} + c$
$b^x \quad (0 < b \neq 1)$	$b^x \ln b$	$\frac{1}{x^2-a^2}$	$\frac{1}{2a} \ln \left  \frac{x-a}{x+a} \right  + c$
$\arcsin x$	$\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$	$\frac{1}{(x-a)(x-b)} \quad (a \neq b)$	$\frac{1}{b-a} \ln \left  \frac{x-b}{x-a} \right  + c$
$\arccos x$	$-\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$	$a^x \quad (a \neq 1)$	$\frac{a^x}{\ln a} + c$
$\arctan x$	$\frac{1}{1+x^2}$	$e^x$	$e^x + c$
$\operatorname{arccot} x$	$-\frac{1}{1+x^2}$	$(\cos x)^2$	$\frac{1}{2}(x + \sin x \cos x) + c$
		$(\sin x)^2$	$\frac{1}{2}(x - \sin x \cos x) + c$

#### LEIBNIZsche Produktregel/Partielle Integration

$$(uv)' = u'v + uv', \quad \int u'v dx = uv - \int uv' dx.$$

#### Quotientenregel

$$\left(\frac{u}{v}\right)' = \frac{u'v - uv'}{v^2}, \quad (\text{für } v(x) \neq 0)$$

#### Kettenregel/Substitutionsregel

$$(f(g(x)))' = f'(g(x))g'(x),$$

$$\int f(g(x))g'(x) dx = \int f(u) du, \quad \text{mit } u = g(x).$$

**Gleichung der Tangente** an die Kurve  $y = f(x)$  im Punkt  $(x_0, f(x_0))$ :

$$y = f(x_0) + f'(x_0)(x - x_0)$$

**Linearisierung (= tangentielle Approximation)**

$$\text{Differenz } \Delta f = f(x_0 + \Delta x) - f(x_0),$$

$$\text{Differential } df = f'(x_0)\Delta x.$$

$$f(x_0 + \Delta x) \approx f(x_0) + f'(x_0)\Delta x \text{ für kleines } \Delta x$$

**TAYLORSche Formel** Falls  $f$  mindestens  $n + 1$ -mal stetig differenzierbar ist, gilt

$$f(x) = \sum_{k=0}^n \frac{f^{(k)}(x_0)}{k!} (x - x_0)^k + R_n(x)$$

$$\text{mit } \lim_{x \rightarrow x_0} \frac{R_n(x)}{(x - x_0)^n} = 0 \text{ und}$$

$$|R_n(x)| \leq \max_{\xi \text{ zwischen } x_0, x} (|f^{(n+1)}(\xi)|) \cdot \frac{|x - x_0|^{n+1}}{(n+1)!}.$$

**TAYLORSche Reihe** (falls  $R_n \rightarrow 0$ )

$$f(x) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{f^{(k)}(x_0)}{k!} (x - x_0)^k$$

**Taylorentwicklungen wichtiger Funktionen** ( $x_0 = 0$ )

Funktion	Taylorreihe	Gültigkeit
<b>Binomische Reihe</b>		
$(1+x)^\alpha$ $\alpha > 0, \alpha \notin \mathbb{N}$	$\sum_{n=0}^{\infty} \binom{\alpha}{n} x^n$	$ x  \leq 1$
$(1+x)^{-\alpha}$ $\alpha > 0$	$\sum_{n=0}^{\infty} \binom{-\alpha}{n} x^n$	$ x  < 1$
<b>Geometrische Reihe (Binom. Reihe mit <math>\alpha = -1</math>)</b>		
$\frac{1}{1 \pm x}$	$\sum_{n=0}^{\infty} (\mp 1)^n x^n$	$ x  < 1$
<b>Quadratwurzeln (Binom. Reihe mit <math>\alpha = \pm \frac{1}{2}</math>)</b>		
$\sqrt{1 \pm x}$	$\sum_{n=0}^{\infty} (\pm 1)^n \binom{\frac{1}{2}}{n} x^n$	$ x  \leq 1$
$\frac{1}{\sqrt{1 \pm x}}$	$\sum_{n=0}^{\infty} (\pm 1)^n \binom{-\frac{1}{2}}{n} x^n$	$ x  < 1$
<b>Exponentialreihe und Logarithmus</b>		
$e^x$	$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{n!}$	$x \in \mathbb{R}$
$\ln(1+x)$	$\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n+1} \frac{x^n}{n}$	$-1 < x \leq 1$
$\ln(1-x)$	$-\sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^n}{n}$	$-1 \leq x < 1$
<b>Kosinus und Sinus</b>		
$\cos x$	$\sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{x^{2n}}{(2n)!}$	$x \in \mathbb{R}$
$\sin x$	$\sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{x^{2n+1}}{(2n+1)!}$	$x \in \mathbb{R}$
<b>Zyklometrische Funktionen</b>		
$\arcsin x$	$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1 \cdot 3 \cdot 5 \cdots (2n-1)}{2 \cdot 4 \cdot 6 \cdots 2n} \frac{x^{2n-1}}{2n-1}$	$ x  < 1$
$\arctan x$	$\sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{x^{2n+1}}{2n+1}$	$ x  < 1$

**Newtonverfahren** für die Ermittlung einer Nullstelle von  $f(x) = 0$ :

$$x_{n+1} = x_n - \frac{f(x_n)}{f'(x_n)}, \quad (x_n) \rightarrow \text{Nullstelle.}$$

**EULERSches Verfahren** für die Lösung der Differentialgleichung  $y'(x) = F(x, y(x))$ , mit Anfangsbedingung  $y(x_0) = y_0$ :  
Man wählt eine Schrittweite  $h$  und setzt für  $n = 0, 1, 2, \dots$

$$x_{n+1} = x_n + h,$$

$$y(x_{n+1}) \approx y_{n+1} = y_n + hF(x_n, y_n).$$

## 5. Differentialgleichungen (DGL)

**Homogene lineare DGL, konstante Koeffizienten.**

Ansatz  $y_h = \exp(\lambda x)$  in die DGL einsetzen  $\rightarrow$  führt (nach Division durch  $\exp(\lambda x)$ ) auf algebraische Gleichung für  $\lambda$ .

**Spezialfälle**

1. Ordnung:  $y' + ay = 0$ ,  $a$  konstant. Führt auf  $\lambda_1 = -a$ .

Allgemeine Lösung:  $y_h = C_1 e^{\lambda_1 x}$ ,  $C_1$  eine Konstante.

2. Ordnung:  $y'' + py' + qy = 0$  führt auf die Gleichung  $\lambda^2 + p\lambda + q = 0$  mit den Lösungen  $\lambda_{1,2} = -p/2 \pm \sqrt{p^2/4 - q}$ .

Allgemeine Lösung ( $C_1, C_2$  Konstante):

$$y_h = \begin{cases} e^{\lambda_1 x} (C_1 + C_2 x) & \text{wenn } \lambda_1 = \lambda_2 \\ C_1 e^{\lambda_1 x} + C_2 e^{\lambda_2 x} & \text{wenn } \lambda_1 \neq \lambda_2, \text{ reell} \\ e^{\alpha x} (C_1 \cos(\beta x) + C_2 \sin(\beta x)) & \text{wenn } \lambda_{1,2} = \alpha \pm i\beta \\ & \text{nicht reell} \end{cases}$$

**Inhomogene lineare DGL, konstante Koeffizienten**

(Ordnung 1 oder 2) Für Störglieder der Form

$s(x) = e^{\alpha x} (P(x) \cos(\beta x) + Q(x) \sin(\beta x))$ , wobei  $P(x), Q(x)$  Polynome vom Grad  $\leq k$ ,  $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$  sind, setzt man als partikuläre Lösung  $y_p = x^r e^{\alpha x} (P_1(x) \cos(\beta x) + Q_1(x) \sin(\beta x))$  an, wobei wieder  $P_1(x), Q_1(x)$  Polynome vom Grad  $\leq k$  sind und

$$r = \begin{cases} 0 & \text{wenn } \alpha + i\beta \neq \lambda_1, \lambda_2, \\ 1 & \text{wenn } \alpha + i\beta = \lambda_1 \neq \lambda_2 \text{ oder } \alpha + i\beta = \lambda_2 \neq \lambda_1, \\ 2 & \text{wenn } \beta = 0 \text{ und } \alpha = \lambda_1 = \lambda_2 \text{ ist.} \end{cases}$$

(Im Fall der Ordnung 1 kann  $r$  nur  $= 0$  oder  $= 1$  sein.)

## 6. Funktionen in mehreren Variablen

**Gleichung der Tangentialebene** an die Fläche  $z = f(x, y)$  im Punkt  $P = (x_0, y_0, f(x_0, y_0))$ :

$$z = f(x_0, y_0) + f_x(x_0, y_0)(x - x_0) + f_y(x_0, y_0)(y - y_0).$$

**Fehlerrechnung**

$$\text{Differenz } \Delta f = f(x_0 + \Delta x, y_0 + \Delta y) - f(x_0, y_0),$$

$$\text{Differential } df = \frac{\partial f}{\partial x}(x_0, y_0) dx + \frac{\partial f}{\partial y}(x_0, y_0) dy$$

mit  $dx = \Delta x = x - x_0$ ,  $dy = \Delta y = y - y_0$ . Es ist

$$\Delta f \approx df.$$

**Gradient und Richtungsableitung**

$$\text{grad } f = \nabla(f) = \left( \frac{\partial f}{\partial x}, \frac{\partial f}{\partial y} \right) \text{ bzw. } \text{grad } f = \nabla(f) = \left( \frac{\partial f}{\partial x}, \frac{\partial f}{\partial y}, \frac{\partial f}{\partial z} \right)$$

Richtungsableitung  $f_{\vec{v}}$  der Funktion  $f$  im Punkt  $P$  in Richtung des Vektors  $\vec{v} \neq 0$

$$f_{\vec{v}}(P) = \frac{1}{\|\vec{v}\|} \text{grad } f(P) \cdot \vec{v}$$

**HESSEsche Determinante**

$$\mathcal{H}(f) = \begin{vmatrix} f_{xx} & f_{xy} \\ f_{yx} & f_{yy} \end{vmatrix} = f_{xx} f_{yy} - f_{xy}^2$$

**Extrema unter Nebenbedingungen, nach LAGRANGE**

Aufgabe: Die Funktion  $f(x, y)$  soll unter der Nebenbedingung  $\varphi(x, y) = 0$  maximal / minimal werden.

Stationäre Punkte von  $f$  unter der NB  $\varphi = 0$  entsprechen den stationären Punkten der Lagrange-Funktion:  $L(x, y, \lambda) = f(x, y) + \lambda \varphi(x, y)$ .

**Methode der kleinsten Quadrate.** Es sind die Parameterwerte  $a_1, \dots, a_n$  so zu bestimmen, dass die Zielfunktion  $Z(a_1, a_2, \dots, a_n) = \sum_{j=1}^k (y_j - F(a_1, \dots, a_n; x_j))^2$  minimal wird.

**Speziell: Ausgleichsgerade**  $y = F(a, b; x) = ax + b$

$$a = \frac{kZ - XY}{kQ - X^2}, \quad b = \frac{QY - XZ}{kQ - X^2} \text{ mit}$$

$$X = \sum_1^k x_j, \quad Y = \sum_1^k y_j, \quad Q = \sum_1^k x_j^2, \quad Z = \sum_1^k x_j y_j.$$