

# Matrizen

## DEFINITION EINER MATRIX

Eine *Matrix der Ordnung*  $m \times n$  oder  $m$  mal  $n$  *Matrix* ist eine rechteckige Anordnung von Zahlen, die  $m$  Zeilen und  $n$  Spalten hat. Sie kann folgendermaßen geschrieben werden:

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & \dots & a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{m1} & a_{m2} & a_{m3} & \dots & a_{mn} \end{pmatrix} \quad (1)$$

Jede Zahl  $a_{jk}$  in dieser Matrix wird ein *Element* genannt. Die Subskripten  $j$  und  $k$  zeigen die Zeile bzw. Spalte der Matrix an, in der das Element steht.

Oft bezeichnet man eine Matrix mittels eines Buchstabens, z. B.  $A$  in (1) oder durch das Symbol  $(a_{jk})$ , welches ein Element darstellt.

Eine Matrix, die nur eine Zeile hat, heißt eine *Zeilenmatrix* [oder *Zeilenvektor*], während eine Matrix, die nur eine Spalte hat, eine *Spaltenmatrix* [oder *Spaltenvektor*] heißt. Wenn die Anzahl der Zeilen  $m$  und Spalten  $n$  gleich sind, heißt die Matrix eine *quadratische Matrix* der Ordnung  $n \times n$  oder kurz  $n$ . Eine Matrix heißt eine *reelle* oder *komplexe Matrix*, je nachdem ob sie als Elemente reelle oder komplexe Zahlen hat.

## EINIGE SPEZIELLE DEFINITIONEN UND OPERATIONEN MIT MATRIZEN

1. **Gleichheit von Matrizen.** Zwei Matrizen  $A = (a_{jk})$  und  $B = (b_{jk})$  derselben Ordnung, d. h., mit gleicher Anzahl von Zeilen und Spalten sind *gleich* dann und nur dann, wenn  $a_{jk} = b_{jk}$  ist.

2. **Addition von Matrizen.** Wenn  $A = (a_{jk})$  und  $B = (b_{jk})$  dieselbe Ordnung haben, definiert man die *Summe* von  $A$  und  $B$  zu  $A + B = (a_{jk} + b_{jk})$ .

**Beispiel 1.** Wenn  $A = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 4 \\ -3 & 0 & 2 \end{pmatrix}$ ,  $B = \begin{pmatrix} 3 & -5 & 1 \\ 2 & 1 & 3 \end{pmatrix}$  ist, dann gilt

$$A + B = \begin{pmatrix} 2+3 & 1-5 & 4+1 \\ -3+2 & 0+1 & 2+3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 5 & -4 & 5 \\ -1 & 1 & 5 \end{pmatrix}$$

Beachte, daß die kommutativen und assoziativen Gesetze der Addition für Matrizen erfüllt sind, d. h., für beliebige Matrizen  $A, B, C$  derselben Ordnung

$$A + B = B + A, \quad A + (B + C) = (A + B) + C \quad (2)$$

3. **Subtraktion von Matrizen.** Wenn  $A = (a_{jk})$ ,  $B = (b_{jk})$  dieselbe Ordnung haben, definiert man die *Differenz* von  $A$  und  $B$  zu  $A - B = (a_{jk} - b_{jk})$ .

**Beispiel 2.** Wenn  $A$  und  $B$  die Matrizen aus Beispiel 1 sind, dann gilt

$$A - B = \begin{pmatrix} 2-3 & 1+5 & 4-1 \\ -3-2 & 0-1 & 2-3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 & 6 & 3 \\ -5 & -1 & -1 \end{pmatrix}$$

4. **Multiplikation einer Matrix mit einer Zahl.** Wenn  $A = (a_{jk})$  gegeben ist und  $\lambda$  eine beliebige Zahl [oder *Skalar*] ist, definiert man das *Produkt* aus  $A$  und  $\lambda$  zu  $\lambda A = A \lambda = (\lambda a_{jk})$ .

**Beispiel 3.** Wenn  $A$  die Matrix aus Beispiel 1 ist und  $\lambda = 4$  gilt, dann ist

$$\lambda A = 4 \begin{pmatrix} 2 & 1 & 4 \\ -3 & 0 & 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 8 & 4 & 16 \\ -12 & 0 & 8 \end{pmatrix}$$

5. **Multiplikation von Matrizen.** Wenn  $A = (a_{jk})$  eine  $m \times n$  Matrix ist, während  $B = (b_{jk})$  eine  $n \times p$  Matrix ist, dann definiert man das *Produkt*  $A \cdot B$  oder  $AB$  aus  $A$  und  $B$  als die Matrix  $C = (c_{jk})$ , wobei

$$c_{jk} = \sum_{i=1}^n a_{ji} b_{ik} \quad (3)$$

und  $C$  von der Ordnung  $m \times p$  ist.

Beachte, daß die Matrixmultiplikation nur dann definiert ist, wenn die Anzahl der Spalten von  $A$  dieselbe ist wie die Anzahl der Zeilen von  $B$ . Solche Matrizen heißen manchmal *konform*.

**Beispiel 4.** Es sei  $A = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 4 \\ -3 & 0 & 2 \end{pmatrix}$ ,  $D = \begin{pmatrix} 3 & 5 \\ 2 & -1 \\ 4 & 2 \end{pmatrix}$ . Dann ist

$$AD = \begin{pmatrix} (2)(3) + (1)(2) + (4)(4) & (2)(5) + (1)(-1) + (4)(2) \\ (-3)(3) + (0)(2) + (2)(4) & (-3)(5) + (0)(-1) + (2)(2) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 24 & 17 \\ -1 & -11 \end{pmatrix}$$

Beachte, daß im allgemeinen  $AB \neq BA$  gilt, d. h., das kommutative Gesetz der Multiplikation für Matrizen ist im allgemeinen nicht erfüllt. Jedoch sind die assoziativen und distributiven Gesetze erfüllt, d. h.,

$$A(BC) = (AB)C, \quad A(B+C) = AB + AC, \quad (B+C)A = BA + CA \quad (4)$$

Eine Matrix  $A$  kann nur dann mit sich selbst multipliziert werden, wenn sie quadratisch ist. Das Produkt  $A \cdot A$  kann in einem solchen Fall  $A^2$  geschrieben werden. Entsprechend definiert man Potenzen einer quadratischen Matrix, d. h.,  $A^3 = A \cdot A^2$ ,  $A^4 = A \cdot A^3$  usw.

6. **Transponierte einer Matrix.** Wenn man Zeilen und Spalten einer Matrix  $A$  vertauscht, nennt man die resultierende Matrix die *Transponierte* von  $A$  und bezeichnet sie mit  $A^T$ . In Symbolen gilt  $A^T = (a_{kj})$ , wenn  $A = (a_{jk})$  ist.

**Beispiel 5.** Die Transponierte von  $A = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 4 \\ -3 & 0 & 2 \end{pmatrix}$  ist

$$A^T = \begin{pmatrix} 2 & -3 \\ 1 & 0 \\ 4 & 2 \end{pmatrix}$$

Man kann beweisen, daß

$$(A+B)^T = A^T + B^T, \quad (AB)^T = B^T A^T, \quad (A^T)^T = A \quad (5)$$

ist.

7. **Symmetrische und schiefsymmetrische Matrizen.** Eine quadratische Matrix  $A$  heißt *symmetrisch*, wenn  $A^T = A$  gilt und *schiefsymmetrisch*, wenn  $A^T = -A$  ist.

**Beispiel 6.** Die Matrix  $E = \begin{pmatrix} 2 & -4 \\ -4 & 3 \end{pmatrix}$  ist symmetrisch, während  $F = \begin{pmatrix} 0 & -2 \\ 2 & 0 \end{pmatrix}$  schiefsymmetrisch ist.

Eine beliebige quadratische Matrix, d. h., die nur reelle Elemente hat, kann man immer als die Summe einer reellen symmetrischen Matrix und einer schiefsymmetrischen Matrix ausdrücken.

- 8. **Komplexe Konjugierte einer Matrix.** Wenn alle Elemente  $a_{jk}$  einer Matrix  $A$  durch ihre komplexen Konjugierten  $\bar{a}_{jk}$  der Matrix ersetzt werden, erhält man die *komplex konjugierte* Matrix von  $A$  und wird mit  $\bar{A}$  bezeichnet.
- 9. **Hermiteische und Schief-Hermiteische Matrizen.** Eine quadratische Matrix  $A$ , die dieselbe wie die komplex Konjugierte ihrer Transponierten ist, d. h., wenn  $A = \bar{A}^T$ , heißt hermitesch. Wenn  $A = -\bar{A}^T$  ist, wird  $A$  *schiefhermitesch* genannt. Wenn  $A$  reell ist, reduzieren sich diese auf symmetrische bzw. schiefsymmetrische Matrizen.
- 10. **Hauptdiagonale und Spur einer Matrix.** Wenn  $A = (a_{jk})$  eine quadratische Matrix ist, dann heißt die Diagonale, die alle Elemente  $a_{jk}$  mit  $j = k$  enthält, die *Hauptdiagonale* und die Summe all dieser Elemente heißt die *Spur* von  $A$ .

Beispiel 7. Die Hauptdiagonale der Matrix

$$\begin{pmatrix} 5 & 2 & 0 \\ 3 & 1 & -2 \\ -1 & 4 & 2 \end{pmatrix}$$

ist schraffiert, und die Spur der Matrix ist  $5 + 1 + 2 = 8$ .

Eine Matrix, für die  $a_{jk} = 0$  bei  $j \neq k$  gilt, heißt eine *diagonale Matrix*.

- 11. **Einheitsmatrix.** Eine quadratische Matrix, in der alle Elemente der Hauptdiagonalen gleich 1 sind, während alle anderen Elemente Null sind, heißt die *Einheitsmatrix* und wird mit  $I$  bezeichnet. Eine wichtige Eigenschaft von  $I$  ist, daß

$$AI = IA = A, \quad I^n = I, \quad n = 1, 2, 3, \dots \tag{6}$$

gilt.

Die Einheitsmatrix spielt in der Matrixalgebra eine ähnliche Rolle wie die Zahl Eins in der gewöhnlichen Algebra.

- 12. **Nullmatrix.** Eine Matrix, deren Elemente alle Null sind, heißt *Nullmatrix* und wird oft mit  $O$  oder einfach 0 bezeichnet. Für eine beliebige Matrix  $A$  mit derselben Ordnung wie 0 gilt:

$$A + 0 = 0 + A = A \tag{7}$$

Sind  $A$  und 0 quadratische Matrizen, dann gilt

$$A0 = 0A = 0 \tag{8}$$

Die Nullmatrix spielt in der Matrixalgebra eine ähnliche Rolle wie die Zahl Null in der gewöhnlichen Algebra.

## DETERMINANTEN

Wenn die Matrix  $A$  in  $(I)$  eine quadratische Matrix ist, dann ordnet man  $A$  eine Zahl, die durch

$$\Delta = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nn} \end{vmatrix} \tag{9}$$

dargestellt ist, zu und nennt sie die *Determinante* der *Ordnung*  $n$  von  $A$ , geschrieben  $\det(A)$ . Um den Wert einer Determinanten zu definieren, führen wir die folgenden Begriffe ein.

- 1. **Minor.** Wenn ein beliebiges Element  $a_{jk}$  von  $\Delta$  gegeben ist, ordnet man eine neue Determinante der Ordnung  $(n - 1)$  zu, die man durch Weglassen aller Elemente der  $j$ -ten Zeile und  $k$ -ten Spalte erhält und der Minor von  $a_{jk}$  heißt.

**Beispiel 8.** Der Minor, der zu dem Element 5 in der zweiten Zeile und dritten Spalte der Determinante vierter Ordnung gehört.

$$\begin{vmatrix} 2 & -1 & 1 & 3 \\ -3 & 2 & 5 & 0 \\ 1 & 0 & -2 & 2 \\ 4 & -2 & 3 & 1 \end{vmatrix} \quad \text{ist} \quad \begin{vmatrix} 2 & -1 & 3 \\ 1 & 0 & 2 \\ 4 & -2 & 1 \end{vmatrix}$$

dies erhält man durch Weglassen der schraffierten Elemente.

2. **Kofaktor.** Wenn man den Minor von  $a_{jk}$  mit  $(-1)^{j+k}$  multipliziert, nennt man das Ergebnis den Kofaktor von  $a_{jk}$  und bezeichnet ihn mit  $A_{jk}$ .

**Beispiel 9.** Der Kofaktor des Elementes 5 in der Determinante des Beispiels 8 ist  $(-1)^{2+3}$  mal dem Minor oder

$$- \begin{vmatrix} 2 & -1 & 3 \\ 1 & 0 & 2 \\ 4 & -2 & 1 \end{vmatrix}$$

Der Wert einer Determinante ist dann als die Summe der Produkte aus den Elementen in einer beliebigen Zeile oder Spalte mit ihren zugehörigen Kofaktoren definiert und heißt die *Laplacesche Entwicklung*. In Symbolen

$$\det A = \sum_{k=1}^n a_{jk} A_{jk} \quad (10)$$

Man kann zeigen, daß dieser Wert von der benutzten Zeile [oder Spalte] unabhängig ist [siehe Aufgabe 15.7].

### SÄTZE ÜBER DETERMINANTEN

**Satz 15-1.** Der Wert einer Determinanten bleibt erhalten, wenn Zeilen und Spalten vertauscht werden. In Zeichen  $\det(A) = \det(A^T)$ .

**Satz 15-2.** Wenn alle Elemente einer Zeile [oder Spalte] mit Ausnahme eines Elementes Null sind, dann ist der Wert der Determinante gleich dem Produkt aus diesem Element und seinem Kofaktor. Speziell ist die Determinante Null, wenn alle Elemente einer Zeile [oder Spalte] Null sind.

**Satz 15-3.** Ein Vertauschen zweier Zeilen [oder Spalten] ändert das Vorzeichen der Determinante.

**Satz 15-4.** Wenn alle Elemente in einer Zeile [oder Spalte] mit einer Zahl multipliziert werden, wird auch die Determinante mit dieser Zahl multipliziert.

**Satz 15-5.** Wenn zwei Zeilen [oder Spalten] gleich oder proportional zueinander sind, ist die Determinante gleich Null.

**Satz 15-6.** Wenn man die Elemente jeder Zeile [oder Spalte] als die Summe zweier Ausdrücke darstellt, dann kann man die Determinante als die Summe zweier Determinanten derselben Ordnung darstellen.

**Satz 15-7.** Wenn man die Elemente einer Zeile [oder Spalte] mit einer gegebenen Zahl multipliziert und zu den entsprechenden Elementen einer anderen Zeile oder Spalte addiert, dann bleibt der Wert der Determinante erhalten.

**Satz 15-8.** Wenn  $A$  und  $B$  quadratische Matrizen derselben Ordnung sind, dann gilt

$$\det(AB) = \det(A) \det(B) \quad (11)$$

**Satz 15-9.** Die Summe der Produkte der Elemente einer Zeile oder Spalte mit den Kofaktoren einer anderen Zeile [oder Spalte] ist Null. In Zeichen

$$\sum_{k=1}^n a_{qk} A_{pk} = 0 \quad \text{oder} \quad \sum_{k=1}^n a_{kq} A_{kp} = 0 \quad \text{für } p \neq q \quad (12)$$

Wenn  $p = q$  ist, ist die Summe mit (10) gleich  $\det(A)$ .

**Satz 15-10.** Es stellen  $v_1, v_2, \dots, v_n$  Zeilenvektoren [oder Spaltenvektoren] einer quadratischen Matrix  $A$  der Ordnung  $n$  dar. Dann ist  $\det(A) = 0$  dann und nur dann, wenn es von Null verschiedene Konstanten [Skalare]  $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_n$  derart gibt, daß

$$\lambda_1 v_1 + \lambda_2 v_2 + \dots + \lambda_n v_n = O \quad (13)$$

ist, wobei  $O$  die Null- oder Nullzeilenmatrix ist. Wenn die Bedingung (13) erfüllt ist, sagt man, daß die Vektoren  $v_1, v_2, \dots, v_n$  *linear abhängig* sind. Sonst sind sie *linear unabhängig*. Eine Matrix  $A$ , für die  $\det(A) = 0$  gilt, heißt eine *singuläre Matrix*. Wenn  $\det(A) \neq 0$  ist, dann heißt  $A$  eine *nichtsinguläre Matrix*.

Praktisch berechnet man eine Determinante der Ordnung  $n$ , indem man den Satz 15-7 benutzt und nacheinander bis auf ein Element alle Elemente in einer Zeile oder Spalte durch Nullen ersetzt und dann den Satz 15-2 anwendet, um eine neue Determinante der Ordnung  $n - 1$  zu ermitteln. Man fährt in dieser Weise fort, um schließlich auf Determinanten der Ordnungen 2 oder 3 zu kommen, die leicht berechnet werden können.

## INVERSE EINER MATRIX

Wenn für eine gegebene Matrix  $A$  eine Matrix  $B$  derart existiert, daß  $AB = I$  gilt, dann heißt  $B$  eine *Inverse* von  $A$  und wird mit  $A^{-1}$  bezeichnet. Der folgende Satz ist grundlegend.

**Satz 15-11.** Wenn  $A$  eine nichtsinguläre quadratische Matrix der Ordnung  $n$  ist [d. h.,  $\det(A) \neq 0$ ], dann gibt es eine eindeutige Inverse  $A^{-1}$  derart, daß  $AA^{-1} = A^{-1}A = I$  ist, und man kann  $A^{-1}$  in der folgenden Form

$$A^{-1} = \frac{(A_{jk})^T}{\det(A)} \quad (14)$$

ausdrücken, wobei  $(A_{jk})$  die Matrix der Kofaktoren  $A_{jk}$  ist und  $(A_{jk})^T = (A_{kj})$  ihre Transponierte darstellt.

Im folgenden sind einige Eigenschaften der Inversen beschrieben:

$$(AB)^{-1} = B^{-1}A^{-1}, \quad (A^{-1})^{-1} = A \quad (15)$$

## ORTHOAGONALE UND UNITÄRE MATRIZEN

Eine reelle Matrix  $A$  heißt eine *orthogonale Matrix*, wenn ihre Transponierte dieselbe Matrix ist wie ihre Inverse, d. h., wenn  $A^T = A^{-1}$  oder  $A^T A = I$ .

Eine komplexe Matrix  $A$  heißt eine *unitäre Matrix*, wenn ihre komplexe, konjugierte Transponierte dieselbe ist wie ihre Inverse, d. h., wenn  $\bar{A}^T = A^{-1}$  oder  $\bar{A}^T A = I$ . Es sei bemerkt, daß eine reelle, unitäre Matrix eine orthogonale Matrix ist.

## ORTHOAGONALE VEKTOREN

In Kapitel 5 fand man, daß das skalare oder Punktprodukt zweier Vektoren  $a_1\mathbf{i} + a_2\mathbf{j} + a_3\mathbf{k}$  und  $b_1\mathbf{i} + b_2\mathbf{j} + b_3\mathbf{k}$  gleich  $a_1b_1 + a_2b_2 + a_3b_3$  war und daß die Vektoren zueinander senkrecht oder orthogonal sind, wenn  $a_1b_1 + a_2b_2 + a_3b_3 = 0$  gilt. Vom Matrizenstandpunkt aus kann man diese Vektoren als Spaltenvektoren

$$A = \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \\ a_3 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ b_3 \end{pmatrix}$$

betrachten, woraus  $A^T B = a_1 b_1 + a_2 b_2 + a_3 b_3$  folgt.

Dies führt uns zur Definition des *Skalarproduktes reeller Spaltenvektoren*  $A$  und  $B$  als  $A^T B$  und zur Definition von  $A$  und  $B$  als *orthogonale* Vektoren, wenn  $A^T B = 0$  ist.

Es ist bequem, dies auf die Fälle zu verallgemeinern, in denen Vektoren komplexe Komponenten haben können und wir haben folgende Definition:

**Definition 1.** Zwei Spaltenvektoren  $A$  und  $B$  heißen *orthogonal*, wenn  $A^T B = 0$  ist und  $A^T B$  wird das *Skalarprodukt* aus  $A$  und  $B$  genannt.

Es sei vermerkt, daß  $\bar{A}^T A = 1$  gilt, wenn  $A$  eine unitäre Matrix ist, was bedeutet, daß das Skalarprodukt von  $A$  mit sich selbst gleich 1 ist oder  $A$  ist ein *Einheitsvektor*, d. h., hat die Länge 1. Somit ist ein unitärer Spaltenvektor gleich einem Einheitsvektor. Wegen diesen Bemerkungen gilt die folgende

**Definition 2.** Eine Menge Vektoren  $X_1, X_2, \dots$ , für die

$$\bar{X}_j^T X_k = \begin{cases} 0 & j \neq k \\ 1 & j = k \end{cases}$$

gilt, heißt eine *unitäre Menge oder System von Vektoren* oder in dem Fall, in dem die Vektoren reell sind, eine *orthonormale Menge* oder eine *orthogonale Menge von Einheitsvektoren*.

**SYSTEME VON LINEAREN GLEICHUNGEN**

Eine Menge von Gleichungen der Form

$$\left. \begin{aligned} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \dots + a_{1n}x_n &= r_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \dots + a_{2n}x_n &= r_2 \\ \dots & \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \dots + a_{mn}x_n &= r_n \end{aligned} \right\} \quad (16)$$

heißt ein *System von  $m$  linearen Gleichungen in den  $n$  Unbekannten  $x_1, x_2, \dots, x_n$* . Wenn  $r_1, r_2, \dots, r_n$  alle Null sind, heißt das System *homogen*. Wenn sie nicht alle Null sind, nennt man es *nicht homogen*. Eine Menge von Zahlen  $x_1, x_2, \dots, x_n$ , die (16) erfüllt, heißt eine *Lösung* des Systems.

In Matrixform kann man (16) schreiben

$$\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{m1} & a_{m2} & \dots & a_{mn} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} r_1 \\ r_2 \\ \vdots \\ r_n \end{pmatrix} \quad (17)$$

oder kürzer  $AX = R$  (18)

wobei  $A, X, R$  die zugehörigen Matrizen in (17) darstellen.

**SYSTEME VON  $n$  GLEICHUNGEN IN  $n$  UNBEKANNTEN. REGEL VON CRAMER**

Wenn  $m = n$  ist und wenn  $A$  eine nichtsinguläre Matrix derart ist, daß  $A^{-1}$  existiert, kann man (17) oder (18) lösen, indem man  $X = A^{-1}R$  (19) schreibt und das System hat eine eindeutige Lösung.

Man kann die Unbekannten  $x_1, x_2, \dots, x_n$  auch in der Form

$$x_1 = \frac{\Delta_1}{\Delta}, \quad x_2 = \frac{\Delta_2}{\Delta}, \quad \dots, \quad x_n = \frac{\Delta_n}{\Delta} \tag{20}$$

ausdrücken, wobei  $\Delta = \det(A)$  die *Determinante des Systems* ist und durch (9) gegeben ist und  $\Delta_k, k = 1, 2, \dots, n$  ist die Determinante, die man aus  $\Delta$  erhält, wenn man die  $k$ -te Spalte wegläßt und sie durch den Spaltenvektor  $R$  ersetzt. Die Regel in (20) heißt *Cramersche Regel*.

Man kann vier Fälle unterscheiden.

**Fall 1.**  $\Delta \neq 0, R \neq 0$ . In diesem Fall gibt es eine eindeutige Lösung, in der nicht alle  $x_k$  Null sind.

**Fall 2.**  $\Delta \neq 0, R = 0$ . In diesem Fall ist die einzige Lösung gleich  $x_1 = 0, x_2 = 0, \dots, x_n = 0$ , d. h.,  $X = 0$ . Diese wird oft die *triviale Lösung* genannt.

**Fall 3.**  $\Delta = 0, R = 0$ . In diesem Fall gibt es unendlich viele Lösungen. Dies bedeutet, daß man wenigstens eine der Gleichungen aus den anderen erhalten kann, d. h., die Gleichungen sind linear abhängig.

**Fall 4.**  $\Delta = 0, R \neq 0$ . In diesem Fall gibt es unendlich viele Lösungen nur dann, wenn alle Determinanten  $\Delta_k$  in (20) Null sind. Sonst gibt es keine Lösung.

Die Fälle, in denen  $m \neq n$  ist, werden in den Aufgaben 15.93-15.96 behandelt.

**EIGENWERTE UND EIGENVEKTOREN**

Es sei  $A = (a_{jk})$  eine  $n \times n$  Matrix und  $X$  ein Spaltenvektor. Die Gleichung

$$AX = \lambda X \tag{21}$$

mit  $\lambda$  als eine Zahl kann man in der Form

$$\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nn} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} = \lambda \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} \tag{22}$$

oder

$$\left. \begin{aligned} (a_{11} - \lambda)x_1 + a_{12}x_2 + \dots + a_{1n}x_n &= 0 \\ a_{21}x_1 + (a_{22} - \lambda)x_2 + \dots + a_{2n}x_n &= 0 \\ \dots & \\ a_{n1}x_1 + a_{n2}x_2 + \dots + (a_{nn} - \lambda)x_n &= 0 \end{aligned} \right\} \tag{23}$$

schreiben.

Die Gleichung (23) hat nichttriviale Lösungen nur dann, wenn

$$\begin{vmatrix} a_{11} - \lambda & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} - \lambda & \dots & a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nn} - \lambda \end{vmatrix} = 0 \tag{24}$$

Dies ist eine Polynomgleichung vom Grade  $n$  in  $\lambda$ . Die Lösungen dieser Polynomgleichung heißen *Eigenwerte* oder *charakteristische Werte* der Matrix  $A$ . Zu jedem Eigenwert gibt es eine Lösung  $X \neq 0$ , d. h., eine nichttriviale Lösung, die ein *Eigenvektor* oder *charakteristischer Vektor* heißt, der zu dem Eigenwert gehört. Die Gleichung (24) kann man auch in der Form

$$\det(A - \lambda I) = 0 \tag{25}$$

schreiben und die Gleichung in  $\lambda$  heißt oft die *charakteristische Gleichung*.

## SÄTZE FÜR EIGENWERTE UND EIGENVEKTOREN

Satz 15-12. Die Eigenwerte einer Hermiteschen Matrix [oder symmetrischen reellen Matrix] sind reell. Die Eigenwerte einer schieferhermiteschen Matrix [oder schiefssymmetrischen reellen Matrix] sind Null oder rein imaginär. Die Eigenwerte einer unitären [oder reellen orthogonalen Matrix] haben alle den absoluten Wert 1.

Satz 15-13. Die Eigenvektoren, die zu verschiedenen Eigenwerten einer hermiteschen Matrix [oder symmetrischen reellen Matrix] gehören, sind orthogonal.

Satz 15-14. [Cayley-Hamilton]. Eine Matrix erfüllt ihre eigene charakteristische Gleichung [siehe Aufgabe 15.40].

Satz 15-15. [Reduktion einer Matrix auf Diagonalform]. Wenn eine nichtsinguläre Matrix  $A$  verschiedene Eigenwerte  $\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3, \dots$  mit zugehörigen Eigenvektoren hat, als Spalten in der Matrix

$$B = \begin{pmatrix} b_{11} & b_{12} & b_{13} & \dots \\ b_{21} & b_{22} & b_{23} & \dots \\ \dots & \dots & \dots & \dots \end{pmatrix}$$

dann ist

$$B^{-1}AB = \begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 & 0 & \dots \\ 0 & \lambda_2 & 0 & \dots \\ 0 & 0 & \lambda_3 & \dots \\ \dots & \dots & \dots & \dots \end{pmatrix}$$

d. h.,  $B^{-1}AB$ , auch die *Transformierte* von  $A$  durch  $B$  genannt, ist eine Diagonalmatrix, die die Eigenwerte von  $A$  in der Hauptdiagonalen und sonst Nullen enthält. Man sagt, daß  $A$  *transformiert* oder *auf Diagonalform reduziert* wurde. Siehe Aufgabe 15.41.

Satz 15-16. [Reduktion einer quadratischen Form auf eine kanonische Form].

Es sei  $A$  eine symmetrische reelle Matrix, z. B.

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{pmatrix} \quad a_{12} = a_{21}, \quad a_{13} = a_{31}, \quad a_{23} = a_{32}$$

Man erhält die *quadratische Form*

$$X^TAX = a_{11}x_1^2 + a_{22}x_2^2 + a_{33}x_3^2 + 2a_{12}x_1x_2 + 2a_{13}x_1x_3 + 2a_{23}x_2x_3$$

wenn  $X = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix}$  ist.

Die Kreuzproduktausdrücke dieser quadratischen Form kann man entfernen, indem man  $X = BU$  ersetzt, wobei  $U$  der Spaltenvektor mit den Elementen  $u_1, u_2, u_3$  ist und  $B$  eine orthogonale Matrix darstellt, die  $A$  diagonalisiert. Die neue quadratische Form in  $u_1, u_2, u_3$  ohne Kreuzproduktausdrücke heißt die *kanonische Form*. Siehe Aufgabe 15.43. Eine Verallgemeinerung auf Hermitesche quadratische Formen kann durchgeführt werden [siehe Aufgabe 15.114].

## OPERATORINTERPRETATION VON MATRIZEN

Wenn  $A$  eine  $n \times n$  Matrix ist, kann man sie als *Operator* oder *Transformation* ansehen, die auf einen Spaltenvektor  $X$  wirkt, um  $AX$  zu erzeugen, der ein anderer Spaltenvektor ist. Mit dieser Interpretation fragt Gleichung (21) nach jenen Vektoren  $X$ , die durch  $A$  in konstante Vielfache von ihnen selbst transformiert werden [oder äquivalent dazu in Vektoren, die dieselbe Richtung, aber möglicherweise verschiedene Größe haben].

Wenn  $A$  eine orthogonale Matrix ist, stellt die Transformation eine *Rotation* dar und erklärt, warum der Absolutwert aller Eigenwerte in einem solchen Fall gleich Eins ist [Satz 15-12], da eine gewöhnliche Rotation eines Vektors seine Größe nicht ändert.

Die Begriffe der Transformation sind bequem, um Interpretationen für viele Eigenschaften von Matrizen zu geben.

## AUFGABEN MIT LÖSUNGEN

### MATRIZENOPERATIONEN

15.1. Berechne (a)  $A + B$ , (b)  $A - B$  für  $A = \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ 4 & 3 \end{pmatrix}$ ,  $B = \begin{pmatrix} -1 & 1 \\ 2 & -4 \end{pmatrix}$ ,  $C = \begin{pmatrix} 1 & 4 \\ -2 & -1 \end{pmatrix}$

(c)  $2A - 3C$ , (d)  $3A + 2B - 4C$ , (e)  $AB$ , (f)  $BA$ , (g)  $(AB)C$ , (h)  $A(BC)$ , (i)  $A^T + B^T$ , (j)  $B^T A^T$ .

$$(a) \quad A + B = \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ 4 & 3 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} -1 & 1 \\ 2 & -4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 6 & -1 \end{pmatrix}$$

$$(b) \quad A - B = \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ 4 & 3 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} -1 & 1 \\ 2 & -4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ 4 & 3 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ -2 & 4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 & -2 \\ 2 & 7 \end{pmatrix}$$

$$(c) \quad 2A - 3C = 2 \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ 4 & 3 \end{pmatrix} - 3 \begin{pmatrix} 1 & 4 \\ -2 & -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4 & -2 \\ 8 & 6 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} -3 & -12 \\ 6 & 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & -14 \\ 14 & 9 \end{pmatrix}$$

$$(d) \quad 3A + 2B - 4C = 3 \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ 4 & 3 \end{pmatrix} + 2 \begin{pmatrix} -1 & 1 \\ 2 & -4 \end{pmatrix} - 4 \begin{pmatrix} 1 & 4 \\ -2 & -1 \end{pmatrix} \\ = \begin{pmatrix} 6 & -3 \\ 12 & 9 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} -2 & 2 \\ 4 & -8 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} -4 & -16 \\ 8 & 4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & -17 \\ 24 & 5 \end{pmatrix}$$

$$(e) \quad AB = \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ 4 & 3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -1 & 1 \\ 2 & -4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} (2)(-1) + (-1)(2) & (2)(1) + (-1)(-4) \\ (4)(-1) + (3)(2) & (4)(1) + (3)(-4) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -4 & 6 \\ 2 & -8 \end{pmatrix}$$

$$(f) \quad BA = \begin{pmatrix} -1 & 1 \\ 2 & -4 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ 4 & 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} (-1)(2) + (1)(4) & (-1)(-1) + (1)(3) \\ (2)(2) + (-4)(4) & (2)(-1) + (-4)(3) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & 4 \\ -12 & -14 \end{pmatrix}$$

Beachte, daß  $AB \neq BA$  unter Verwendung von (e); es wird die Tatsache erläutert, daß das kommutative Gesetz für Produkte im allgemeinen nicht gilt.

$$(g) \quad (AB)C = \begin{pmatrix} -4 & 6 \\ 2 & -8 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 4 \\ -2 & -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -16 & -22 \\ 18 & 16 \end{pmatrix}$$

$$(h) \quad A(BC) = \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ 4 & 3 \end{pmatrix} \left[ \begin{pmatrix} -1 & 1 \\ 2 & -4 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 4 \\ -2 & -1 \end{pmatrix} \right] = \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ 4 & 3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -3 & -5 \\ 10 & 12 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -16 & -22 \\ 18 & 16 \end{pmatrix}$$

Beachte, daß  $(AB)C = A(BC)$  unter Verwendung von (g); es wird die Tatsache erläutert, daß das assoziative Gesetz für Produkte gilt.

$$(i) \quad A^T + B^T = \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ 4 & 3 \end{pmatrix}^T + \begin{pmatrix} -1 & 1 \\ 2 & -4 \end{pmatrix}^T = \begin{pmatrix} 2 & 4 \\ -1 & 3 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} -1 & 2 \\ 1 & -4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 6 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$$

Beachte, daß unter Verwendung von (a)  $A^T + B^T = (A + B)^T$  gilt

$$(j) \quad B^T A^T = \begin{pmatrix} -1 & 1 \\ 2 & -4 \end{pmatrix}^T \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ 4 & 3 \end{pmatrix}^T = \begin{pmatrix} -1 & 2 \\ 1 & -4 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2 & 4 \\ -1 & 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -4 & 2 \\ 6 & -8 \end{pmatrix}$$

Beachte, daß unter Verwendung von (e)  $B^T A^T = (AB)^T$  gilt.

## 2.12 OVER-DETERMINED SYSTEMS

Consider the following over-determined system of linear equations:

$$\begin{aligned}
 x_1 + x_2 &= 1.98 \\
 2.05x_1 - x_2 &= 0.95 \\
 3.06x_1 + x_2 &= 3.98 \\
 -1.02x_1 + 2x_2 &= 0.92 \\
 4.08x_1 - x_2 &= 2.90
 \end{aligned}
 \tag{2.12.1}$$

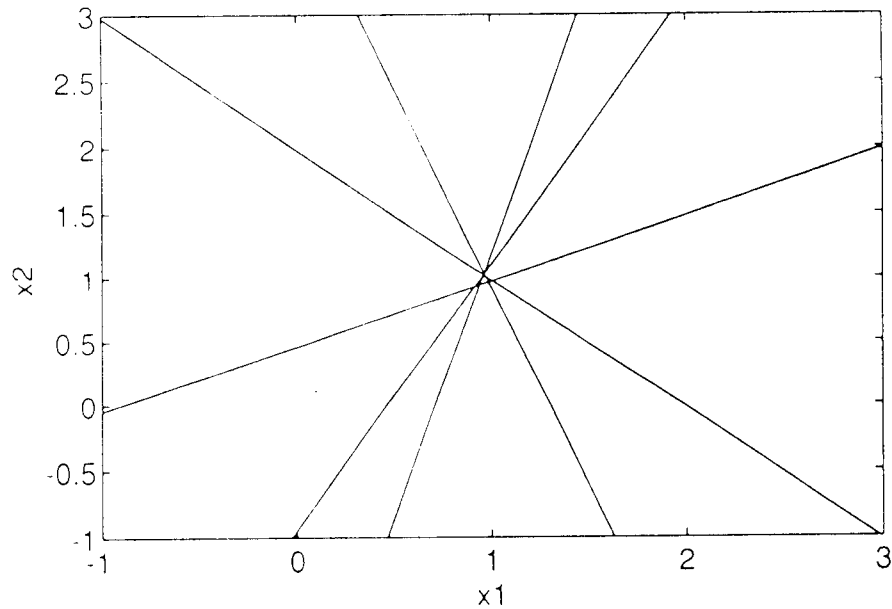


Fig. 2.12.1. Plot of inconsistent equation system (2.12.1).

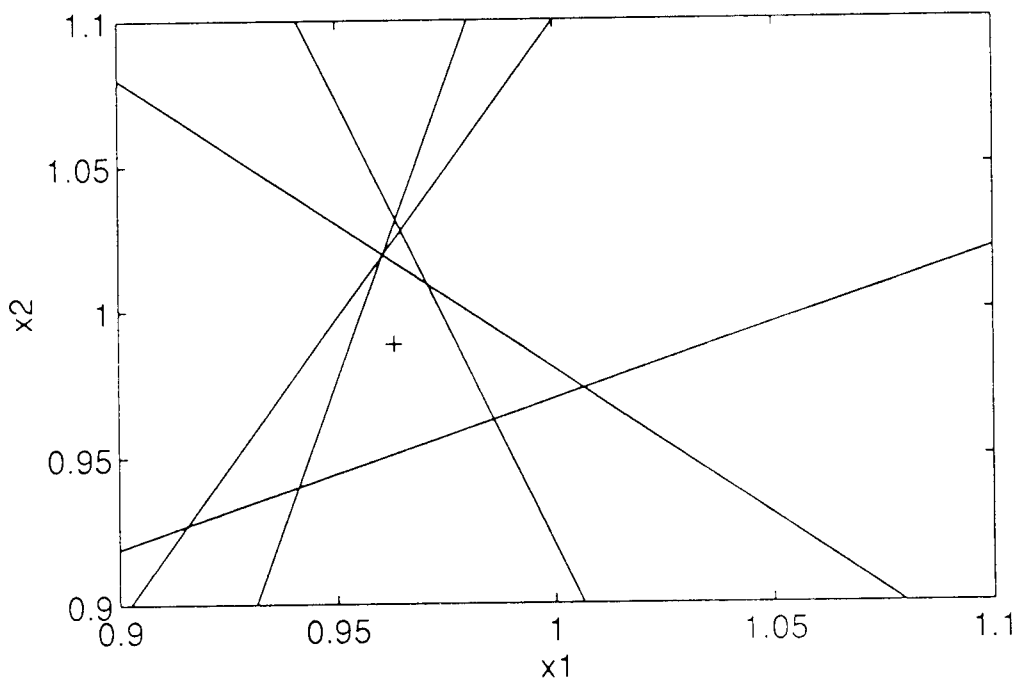


Fig. 2.12.2. Plot of inconsistent equation system (2.12.1) showing the region of intersection of the equations, where "+" indicates "best" solution.

# Überbestimmte Gleichungssysteme

$$A \vec{x} = \vec{b}$$

$m \times n$     $n \times 1$     $m \times 1$

$$m > n$$

$$\bullet \quad n=1 \quad \vec{a} = (a_1, a_2, \dots, a_m)^T$$
$$\vec{b} = (b_1, b_2, \dots, b_m)^T$$

$$\vec{a} x = \vec{b}$$

Pseudolösung (Kleinste-Quadrate-Lösung)

Restvektor (Residuenvektor)  $\vec{r} = \vec{a} x - \vec{b}$

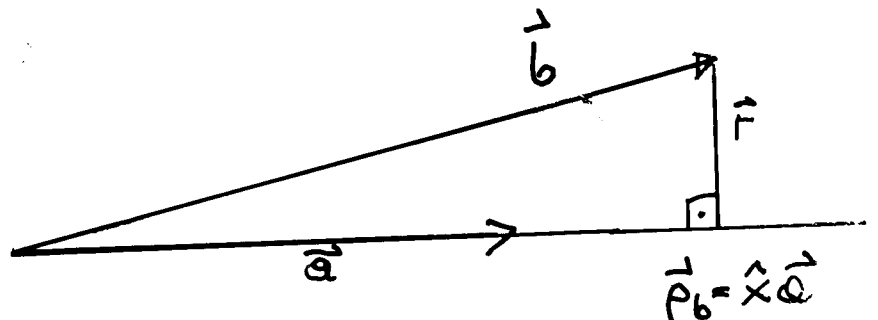
$$\varepsilon = |\vec{r}| = \sqrt{(a_1 x - b_1)^2 + (a_2 x - b_2)^2 + \dots + (a_m x - b_m)^2}$$

= min!

$$\varepsilon^2 = (\vec{a} x - \vec{b})^T (\vec{a} x - \vec{b}) = \vec{a}^T \vec{a} x^2 - 2 \vec{a}^T \vec{b} x + \vec{b}^T \vec{b}$$

$$\frac{d\varepsilon^2}{dx} = 2 \vec{a}^T \vec{a} x - 2 \vec{a}^T \vec{b} = 0$$

$$\hat{x} = \frac{\vec{a}^T \vec{b}}{\vec{a}^T \vec{a}}$$



• Pseudolösungen in mehreren Unbekannten ( $n > 1$ )

$$a_{11}x_1 + a_{12}x_2 = b_1$$

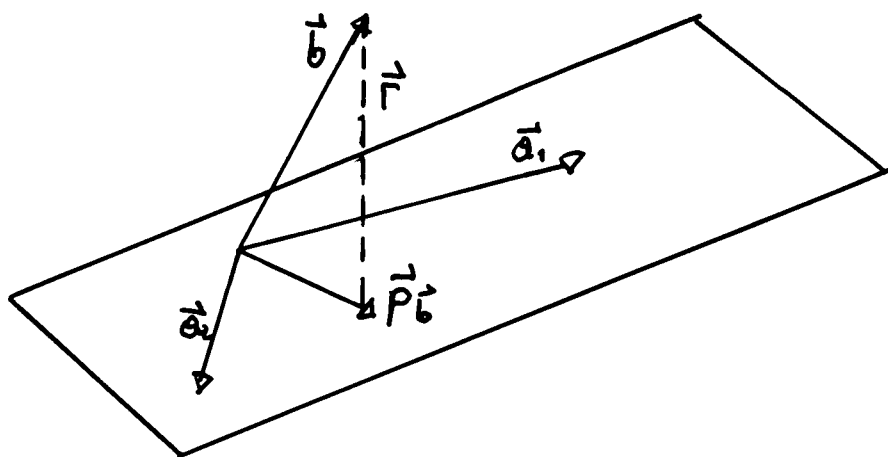
$$a_{21}x_1 + a_{22}x_2 = b_2$$

$$a_{31}x_1 + a_{32}x_3 = b_3$$

$$A\vec{x} = \vec{b}$$

Restvektor:  $\vec{r} = A\vec{x} - \vec{b}$

Fehler:  $\varepsilon = |A\vec{x} - \vec{b}|$ ,  $\varepsilon^2 = (A\vec{x} - \vec{b})^T (A\vec{x} - \vec{b})$



$$\hat{p}_b = A\hat{x}$$

Bedingung:  $\vec{r}^T \vec{c} = 0$ , für alle Vektoren  $\vec{c} = \gamma_1 \vec{a}_1 + \gamma_2 \vec{a}_2 = (\vec{a}_1, \vec{a}_2) \begin{pmatrix} \gamma_1 \\ \gamma_2 \end{pmatrix}$

$$\begin{aligned} 0 &= \vec{c}^T \vec{r} = (A\vec{\gamma})^T (A\vec{x} - \vec{b}) = \vec{\gamma}^T A^T (A\vec{x} - \vec{b}) = \\ &= \vec{\gamma}^T [A^T A\vec{x} - A^T \vec{b}] \end{aligned}$$

$$\Rightarrow A^T A\vec{x} = A^T \vec{b} \quad \text{"Normalgleichungen"}$$

$$\text{Pseudolösung: } \hat{\vec{x}} = (A^T A)^{-1} A^T \vec{b}$$

$$(\text{falls } \det(A^T A) \neq 0)$$

Vektorprojektion von  $b$  auf die "Spaltenebene" (Spaltenraum)

$$\vec{p}_b = A \hat{\vec{x}} = A(A^T A)^{-1} A^T \vec{b}$$

$$B1) \quad A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 1 & 5 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \quad \vec{b} = \begin{pmatrix} 4 \\ 3 \\ 9 \end{pmatrix}$$

$$A^T A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 2 & 5 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 1 & 5 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & 7 \\ 7 & 29 \end{pmatrix}$$

$$(A^T A)^{-1} = \frac{1}{9} \begin{pmatrix} 29 & -7 \\ -7 & 2 \end{pmatrix}$$

$$\vec{p}_b = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 1 & 5 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \frac{1}{9} \begin{pmatrix} 29 & -7 \\ -7 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 2 & 5 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 4 \\ 3 \\ 9 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4 \\ 3 \\ 0 \end{pmatrix}$$

B2)

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \quad \vec{b} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$A^T A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}$$

$$(A^T A)^{-1} = \frac{1}{3} \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ -1 & 2 \end{pmatrix}$$

$$\hat{x} = \frac{1}{3} \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ -1 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$= \frac{1}{3} \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ -1 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} = \frac{1}{3} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

$$\vec{p}_6 = \frac{1}{3} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ -1 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} = \frac{1}{3} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix}$$

Überbestimmtes Gl.-System:  $A \underline{x} = \underline{b}$

m > n

$$|A \underline{x} - \underline{b}|^2 = (A \underline{x} - \underline{b})^T (A \underline{x} - \underline{b}) = \text{Min!}$$

Restvektor  $\underline{r} := A \underline{x} - \underline{b}$ ;  $\|\underline{r}\|^2 = \sum r_i^2 = \text{Min!}$

Der Vektor  $\underline{x}$  ist genau dann eine Lösung, wenn  $\underline{r}$  orthogonal zu allen Spalten von  $A$  ist, d.h.

$$A^T \underline{r} = A^T (A \underline{x} - \underline{b}) = 0$$

oder

$$A^T A \underline{x} = A^T \underline{b}. \quad (\text{"Normalgleichungen"})$$

Ist  $\text{rg}(A) = n$ , besitzt  $A^T A \underline{x} = \underline{b}$  eine eindeutige Lösung

$$\hat{\underline{x}} = (A^T A)^{-1} A^T \underline{b}$$

Bem.: "Rang von  $A$ "

$\text{rg}(A) = \text{Anzahl linear unabh. Zeilen}$

# Singulärwertzerlegung (SVD)

Für eine beliebige  $m \times n$ -Matrix  $A$  ist die Matrix  $A^T A$  nicht-negativ definit, denn es gilt

$$\underline{x}^T (A^T A) \underline{x} = |A \underline{x}|^2 \geq 0$$

Ihre EW  $\lambda_1 \geq \lambda_2 \geq \dots \geq \lambda_m \geq 0$  können somit in der Form  $\lambda_k = \sigma_k^2$ ,  $\sigma_k \geq 0$ , geschrieben werden. Die Zahlen

$$\sigma_1 \geq \dots \geq \sigma_m$$

bezeichnet man als Singulärwerte von  $A$ .

SVD: Es gibt eine orthogonale Matrix  $U$  und eine orthogonale Matrix  $V$ , sodass  $U^T A V =: \Sigma$  eine  $n \times m$ -Diagonalmatrix der Gestalt

$$\Sigma = \begin{pmatrix} D & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad D := \text{diag}(\sigma_1, \dots, \sigma_r)$$

$$\sigma_1 \geq \sigma_2 \geq \dots \geq \sigma_r > 0.$$

Dabei sind  $\sigma_1, \dots, \sigma_r$  gerade die von 0 verschiedenen Singulärwerte von  $A$ ,  $r$  ist der Rang von  $A$ .

Die von 0 verschiedenen Singulärwerte von  $A^T$  sind ebenfalls die Zahlen  $\sigma_1, \dots, \sigma_r$ .

Die Zerlegung

$$A = U \Sigma V^T$$

heißt Singulärwertzerlegung (SVD) von  $A$ .

Pseudolösungen  $|A \underline{x} - \underline{b}| = \text{Min!}$

$$\underline{\hat{x}} = V \Sigma^+ U^T \underline{b}$$

mit

$$\Sigma^+ = \begin{pmatrix} \sigma_i^{-1} & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Die Matrix  $A^+ = V \Sigma^+ U^T$  heißt Pseudoinverse

Für alle Matrizen  $A$  gilt:

$$A^{++} = A, \quad (A^+)^T = (A^T)^+$$

Für eine Matrix  $A$  mit  $\det(A^T A) \neq 0$  gilt

$$A^+ = (A^T A)^{-1} A^T.$$

Anwendungen von SWZ und Pseudoinversen:

1) Die Lösung des linearen Ausgleichsproblems

$$|A \vec{x} - \vec{b}| = \text{Min!}$$

ist durch

$$\hat{x} = A^+ \vec{b}$$

gegeben.

Syntax in MATLAB:

$$x = A \setminus b$$

oder

$$x = \text{pinv}(A) * b$$

Jede Lösung  $\hat{x}$  der Normalgleichungen  $A^T A \vec{x} = A^T \vec{b}$  ist eine kleinste-Quadrate-Lösung (Pseudolösung) des linearen Ausgleichsproblems  $A \vec{x} = \vec{b}$ .

Beweis:

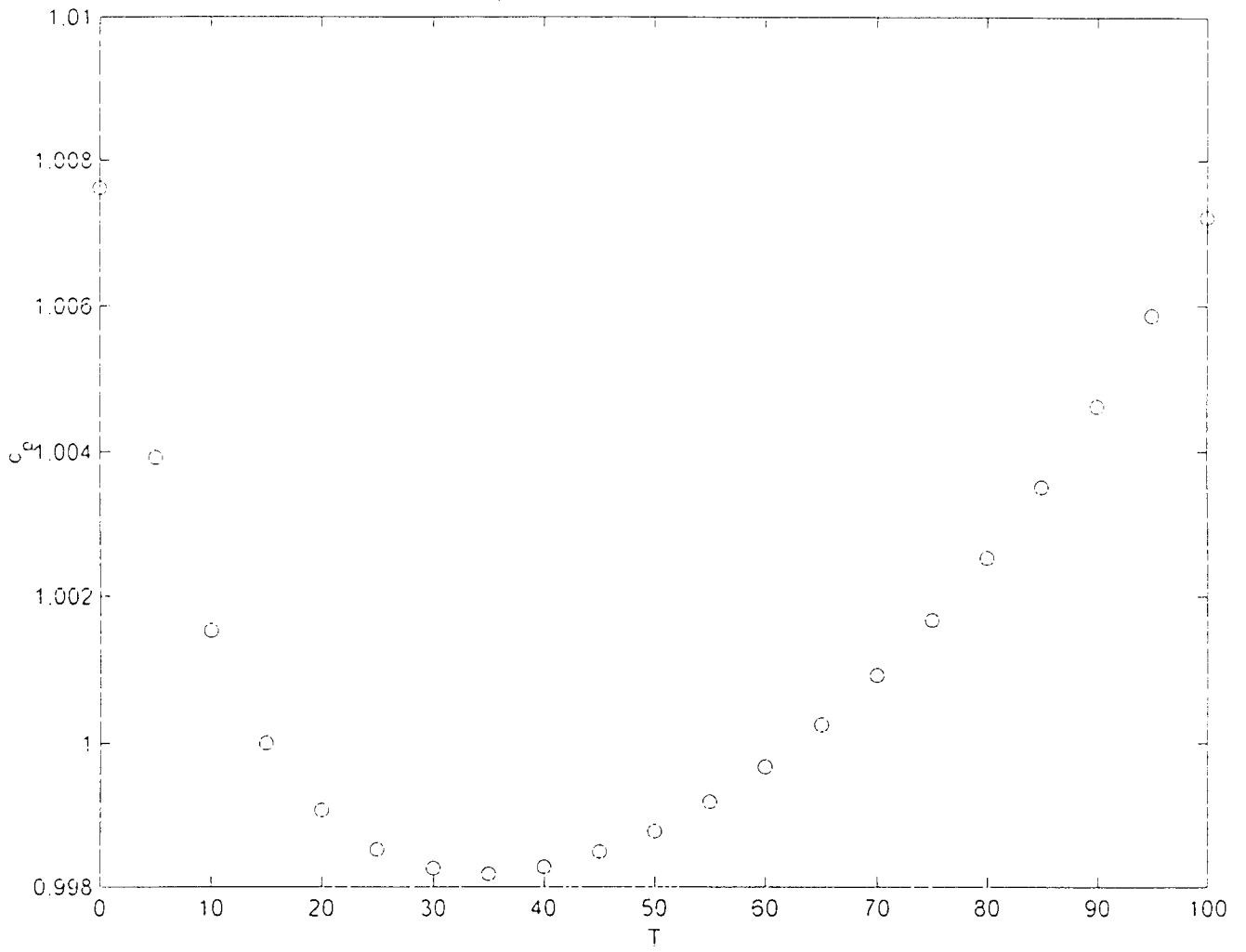
$$\begin{aligned}
 |\vec{b} - A\vec{x}|^2 &= |\vec{b} - A\hat{x} + A(\hat{x} - \vec{x})|^2 \\
 &= (\vec{b} - A\hat{x} + A(\hat{x} - \vec{x}))^T (\vec{b} - A\hat{x} + A(\hat{x} - \vec{x})) \\
 &= (\vec{b} - A\hat{x})^T (\vec{b} - A\hat{x}) \\
 &\quad + 2(A(\hat{x} - \vec{x}))^T (\vec{b} - A\hat{x}) \\
 &\quad + (A(\hat{x} - \vec{x}))^T (A(\hat{x} - \vec{x})) \\
 &= |\vec{b} - A\hat{x}|^2 + 2(\hat{x} - \vec{x})^T \underbrace{(A^T \vec{b} - A^T A \hat{x})}_{=0} + |A(\hat{x} - \vec{x})|^2 \\
 &\geq |\vec{b} - A\hat{x}|^2, \quad \text{w.z.z.w.}
 \end{aligned}$$

Pseudoinverse:  $A^+ = (A^T A)^{-1} A^T$ , falls  $\det A \neq 0$

Allgemeingilt  $A^+ = V(\Sigma^T \Sigma)^{-1} \Sigma^T U^T$

Pseudolösung:  $\hat{x} = A^+ \vec{b}$

Spezifische Wärme von Wasser



» 'Spezifische Wärme von Wasser als Funktion der Temperatur T [° C] ' ;  
 » [T' cp']

ans =

T	cp
0	1.0076
5.0000	1.0039
10.0000	1.0015
15.0000	1.0000
20.0000	0.9991
25.0000	0.9985
30.0000	0.9983
35.0000	0.9982
40.0000	0.9983
45.0000	0.9985
50.0000	0.9988
55.0000	0.9992
60.0000	0.9997
65.0000	1.0002
70.0000	1.0009
75.0000	1.0017
80.0000	1.0025
85.0000	1.0035
90.0000	1.0046
95.0000	1.0059
100.0000	1.0072

$$C_p = x_0 + x_1 T + x_2 T^2 + x_3 T^3$$

» A

A =

	T <sup>0</sup>	T <sup>1</sup>	T <sup>2</sup>	T <sup>3</sup>
1	0	0	0	0
1	5	25	125	
1	10	100	1000	
1	15	225	3375	
1	20	400	8000	
1	25	625	15625	
1	30	900	27000	
1	35	1225	42875	
1	40	1600	64000	
1	45	2025	91125	
1	50	2500	125000	
1	55	3025	166375	
1	60	3600	216000	
1	65	4225	274625	
1	70	4900	343000	
1	75	5625	421875	
1	80	6400	512000	
1	85	7225	614125	
1	90	8100	729000	
1	95	9025	857375	
1	100	10000	1000000	

»

```
% Lineares Ausgleichsproblem
% Fitting eines kubischen Polynom
%  $cp = x_1 + x_2 \cdot T + x_3 \cdot T^2 + x_4 \cdot T^3$ 
load spezwaer; %Einlesen der Daten
T = T'; cp = cp'; % Transposition der Zeilenvektoren
Phi = [T.^0 T.^1 T.^2 T.^3];
x= Phi\cp; % Lösung der Normalgleichungen
y=x(1)+x(2)*T+x(3)*T.^2+x(4)*T.^3;
plot(T,y,T,cp,'o')
```

Spezifische Wärme von Wasser

