Ingenieurmathematik (LBT) – SS 2009

UE – Aufgaben

1) Man bestimme die Werte von a so, dass das folg. lineare Gleichungssystem a) keine Lösung, b) mehr als eine Lösung, c) eine eindeutige Lösung besitzt:

$$\begin{aligned} x + y - z &= 1 \\ 2x + 3y + az &= 3 \\ x + ay + 3z &= 2. \end{aligned}$$

2) Bestimmen Sie (mit Papier und Bleistift) die allgemeine Lösung des folg. Gleichungssystems:

$$\begin{aligned} x + 2y - z &= 0 \\ 2x + 5y + 2z &= 0 \\ x + 4y + 7z &= 0 \\ x + 3y + 3z &= 0 \end{aligned}$$

3) Berechnen Sie (mit Papier und Bleistift) die Inversen folgender Matrizen, falls diese existieren:

$$\begin{pmatrix} -5 & -3 \\ 7 & 4 \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} a_1 & & 0 \\ & a_2 & \\ 0 & & \ddots \\ & & & a_n \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} \cos\phi & -\sin\phi & 0 \\ \sin\phi & \cos\phi & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

4) Berechnen Sie (mit Papier und Bleistift) die Eigenwerte und Eigenvektoren der Matrix

$$\begin{pmatrix} 1 & -2 \\ -2 & 4 \end{pmatrix}.$$

5) Unter Verwendung der MATLAB-Funktion eig(A) Bestimmen Sie die Eigenwerte und Eigenvektoren der Matrix

$$A = \begin{pmatrix} 5 & 7 & -5 \\ 0 & 4 & -1 \\ 2 & 8 & -3 \end{pmatrix}.$$

Verifizieren Sie für diese Matrix den Satz 15-15 (Schaum's Outline Matrizen) $A = BDB^{-1}$.

6) Bestimmen Sie eine spezielle Lösung des Gleichungssystems aus Aufgabe 2 mittels der Pseudoinversen (MATLAB-Befehl pinv(A))

7) Bei einer Bodentemperatur von 20°C wurde der verfügbare Phosphorgehalt für Pflanzen y [ppm] und drei verschiedene Phosphorfraktionen x_1, x_2, x_3 [ppm] im Boden gemessen. Die 18 Beobachtungssätze lauten:

x_1	x_2	x_3	y	x_1	x_2	x_3	y
0.4	53	158	64	12.6	58	112	51
0.4	23	163	60	10.9	37	111	76
3.1	19	37	71	23.1	46	114	96
0.6	34	157	61	23.1	50	134	77
4.7	24	59	54	21.6	44	73	93
1.7	65	123	77	23.1	56	168	95
9.4	44	46	81	1.9	36	143	54
10.1	31	117	93	26.8	58	202	168
11.6	29	173	93	29.9	51	124	99

Wir unterstellen das lineare Modell $y = b_0 + b_1 x_1 + b_2 x_2 + b_3 x_3$.
Schätzen Sie die Koeffizienten b_0, b_1, b_2 und b_3.

Aufgabe 8:

Soil and sediment adsorption, the extent to which chemicals collect in a condensed form on the surface, is an important characteristic because it influences the effectiveness of pesticides and various agricultural chemicals. The article "Adsorption of Phosphate, Arsenate, Methanearsonate, and Cacodylate by Lake and Stream Sediments: Comparison with Soils" (*J. of Environ. Qual.*, 1984: 499–504) gave the following data on

y = phosphate adsorption index

x_1 = amount of extractable iron

x_2 = amount of extractable aluminum

Observation	x_1	x_2	y
1	61	13	4
2	175	21	18
3	111	24	14
4	124	23	18
5	130	64	26
6	173	38	26
7	169	33	21
8	169	61	30
9	160	39	28
10	244	71	36
11	257	112	65
12	333	88	62
13	199	54	40

Thus the first observation is the triple $(x_{11}, x_{21}, y_1) = (61, 13, 4), \ldots,$ and the last observation is $(x_{1,13}, x_{2,13}, y_{13}) = (199, 54, 40)$.

Assume a linear relationship $y = a + bx_1 + cx_2$. Estimate the coefficients a, b, c.

Predict the phosphate adsorption index for an observation to be made when extractable iron is 150 and extractable aluminium is 60.

2. Differentialgleichungen und Differentialgleichungssysteme

9) Bestimmen Sie die Lösung des <u>linearen</u> Glukose/Insulin-Systems auf dem Intervall $[0,5]$ für die Werte

$$\alpha = \delta = -0.8, \quad \beta = \gamma = 0.6, \quad p(t) \equiv 0.5,$$

und den Anfangswerten $g(0) = 1.2$, $i(0) = 0.3$.

10) Bestimmen Sie den (einzigen) stationären Punkt des Systems aus Aufgabe 9.

11) Chemische Reaktion $A \to B \to C$

Bestimmen Sie die jeweils vorhandene Stoffmengen auf dem Intervall $[0,5]$ für die Werte $k_1 = 0.6$, $k_2 = 0.9$. Anfangswerte: $y_1(0) = 3$, $y_2(0) = 0$, $y_3 = 0$.

12) Integrieren Sie die Dgln. des nichtlinearen Modells der Insulin-Regulierung nach Mc Clamroch für die Werte $\alpha = 25\, h^{-1}$, $\beta = 18.5\, L\, h^{-1} \mu g^{-1}$, $\delta = 2.1\, h^{-1}$, $M = 0.85\, g\, L^{-1}$, $V = 5L$, $\gamma = 3.5\, h^{-1}$ auf dem Intervall $[0, 7.5]$ mit den Anfangswerten $g(0) = 0.75\, g\, L^{-1}$, $i(0) = 0$. Glukoseaufnahme:

$$p(t) = \begin{cases} -40(t^2 - 4t + 3) & \text{für } 1 \le t \le 3 \\ 0 & \text{sonst,} \end{cases}$$

$[g/Lh]$, $q(t) \equiv 0$.

Stellen Sie die Lösungen der Aufgaben 9 und 12 sowohl durch ein Zeitdiagramm als auch ein Phasendiagramm grafisch dar.

13) Entwickeln Sie die Funktion $f(x) = \sin^3 x$ in eine (abbrechende) Fourierreihe. Bestimmen Sie die Lösung der Anfangs-Randwertaufgabe

$$\frac{\partial u}{\partial t} = \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}, \quad 0 < x < \pi, \quad t > 0$$

$$u(0, x) = \sin^3 x$$

$$u(t, 0) = u(t, \pi) = 0.$$

Stellen Sie die Lösung durch ein 3D-Plot grafisch dar.
Hinweis: Drücken Sie $\sin^3 x$ durch $\sin x$ und $\sin 3x$ aus (s. Formelsammlung). Es ist kein Integrieren notwendig.

14) Integrieren Sie nach der Linienmethode ($\Delta x = 1/20$)

$$\frac{\partial u}{\partial t} = \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}, \quad 0 < x < 1, \quad u(0, x) = x^3(1 - x)$$

zu den gemischten Randbedingungen

$$u(t, 0) = \frac{t}{3}, \quad u_x(t, 1) = 0.$$ Stellen Sie die Lösung grafisch dar (3D-Plot)

15) Skizzieren Sie die Graphen folgender Funktionen

a) $f(x) = 2\,U(x-1) - U(x-5)$

b) $g(x) = U(x-2) - 2\,U(x-4) + U(x-6)$

c) $h(t) = t * \delta(t-5)$ (Faltung!)

16) Unter Verwendung der Laplace-Transformation bestimmen Sie die Lösung der Dgl. $\ddot{y} + y = f(t)$, $y(0) = \dot{y}(0) = 0$,

$$f(t) = \begin{cases} 0 & \text{für } t < 2 \\ 2.5 & \text{für } t \geq 2. \end{cases}$$

Zeichnen Sie ein Zeit- und ein Phasendiagramm!

17) Superpositionsintegral $y(t) = \int_0^t k(t-s)\,x(s)\,ds$

Die Eingangskonzentration ist gegeben durch $x(t) = 2\,U(t-s)$, die Mischungscharakteristik $k(t) = 0.5\,t^2 e^{-\frac{t}{10}}$. Mittels des Faltungssatzes bestimmen Sie $y(t)$ und stellen Sie dieses grafisch im Intervall $[0, 100]$ dar.

18) Ebenso für die Eingangskonzentration

$$x(t) = \begin{cases} 2 & \text{für } 0 \leq 2 \leq 8 \\ 0 & \text{sonst.} \end{cases}$$