M. R. Spiegel: Höhere Mathematik für Ingenieure und Naturwissenschaftler. Schaum's Outline, 1978.

KAPITEL 7

Fourier-Reihen

PERIODISCHE FUNKTIONEN

Eine Funktion $f(x)$ hat eine *Periode* T oder heißt *periodisch* mit der Periode T, wenn für alle x gilt: $f(x+T) = f(x)$, wobei T eine positive Konstante ist. Der kleinste Wert von $T > 0$ wird die *Grundperiode* oder kurz die *Periode* von $f(x)$ genannt.

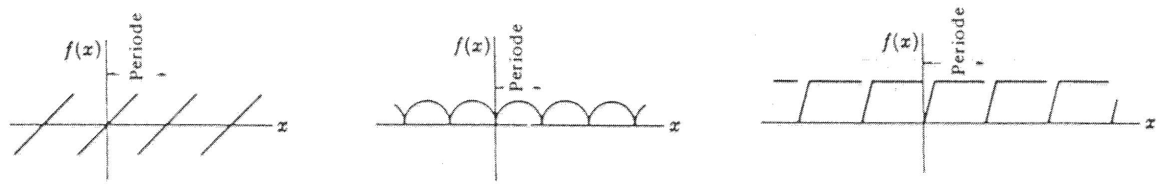
Beispiel 1: Die Funktion $\sin x$ hat die Perioden $2\pi, 4\pi, 6\pi, \ldots$, da $\sin(x+2\pi)$, $\sin(x+4\pi)$, $\sin(x+6\pi), \ldots$ alle gleich $\sin x$ sind. Jedoch ist 2π die *Grundperiode* oder die *Periode* von $\sin x$.

Beispiel 2: Die Periode von $\sin nx$ oder $\cos nx$ ist $2\pi/n$, wobei n eine ganze positive Zahl ist.

Beispiel 3: Die Periode von $\tan x$ ist π.

Beispiel 4: Eine Konstante hat jede positive Zahl als Periode.

Weitere Beispiele periodischer Funktionen zeigen die Graphen der Abbildungen 7-1(a), (b) und (c).



(a) (b) (c)

Abb. 7-1

FOURIER-REIHEN

Es sei $f(x)$ in dem Intervall $(-L, L)$ definiert und außerhalb dieses Intervalls durch $f(x+2L) = f(x)$ bestimmt, d. h., man nimmt an, daß $f(x)$ die Periode $2L$ hat. Die *Fourier-Reihe* oder *Fourier-Entwicklung* von $f(x)$ ist durch

$$\frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} \left(a_n \cos \frac{n\pi x}{L} + b_n \sin \frac{n\pi x}{L} \right) \qquad (1)$$

gegeben, wobei die *Fourier-Koeffizienten* a_n und b_n gegeben sind durch

$$\left\{ \begin{aligned} a_n &= \frac{1}{L} \int_{-L}^{L} f(x) \cos \frac{n\pi x}{L} \, dx \\ b_n &= \frac{1}{L} \int_{-L}^{L} f(x) \sin \frac{n\pi x}{L} \, dx \end{aligned} \right. \qquad n = 0, 1, 2, \ldots \qquad (2)$$

Wenn $f(x)$ die Periode $2L$ hat, kann man die Koeffizienten a_n und b_n auch bestimmen aus:

$$\left\{ \begin{aligned} a_n &= \frac{1}{L} \int_{c}^{c+2L} f(x) \cos \frac{n\pi x}{L} \, dx \\ b_n &= \frac{1}{L} \int_{c}^{c+2L} f(x) \sin \frac{n\pi x}{L} \, dx \end{aligned} \right. \qquad (3)$$

wobei c irgendeine reelle Zahl ist. Im Spezialfall $c = -L$ wird (3) zu (2).

Um a_0 in (*1*) zu bestimmen, benutzt man (*2*) oder (*3*) mit $n = 0$. Zum Beispiel folgt aus (*2*) der Ausdruck: $a_0 = \frac{1}{L}\int_{-L}^{L} f(x)\,dx$. Man beachte, daß der konstante Ausdruck in (*1*) gleich dem Ausdruck $\frac{a_0}{2} = \frac{1}{2L}\int_{-L}^{L} f(x)\,dx$ ist, der das *Mittel* von $f(x)$ über eine Periode darstellt.

Wenn $L = \pi$ ist, sind die Reihen (*1*) und die Koeffizienten (*2*) oder (*3*) besonders einfach. In diesem Fall hat die Funktion die Periode 2π.

DIRICHLET-BEDINGUNGEN

Satz 7.1. Vorausgesetzt sei:

(1) $f(x)$ ist definiert und eindeutig mit Ausnahme einer endlichen Anzahl von Punkten in $(-L, L)$.

(2) $f(x)$ ist außerhalb von $(-L, L)$ periodisch mit der Periode $2L$.

(3) $f(x)$ und $f'(x)$ sind stückweise stetig in $(-L, L)$. Dann konvergiert die Reihe (*1*) mit den Koeffizienten (*2*) oder (*3*) nach

(*a*) $f(x)$, wenn x eine Stetigkeitsstelle ist

(*b*) $\dfrac{f(x+0)+f(x-0)}{2}$ wenn x eine Unstetigkeitsstelle ist.

In diesem Satz sind $f(x+0)$ und $f(x-0)$ die rechtsseitigen und linksseitigen Grenzwerte von $f(x)$ bei x und werden durch $\lim\limits_{\epsilon \to 0} f(x+\epsilon)$ bzw. $\lim\limits_{\epsilon \to 0} f(x-\epsilon)$ dargestellt, wobei $\epsilon > 0$ ist. Dies schreibt man häufig auch in den Formen $\lim\limits_{\epsilon \to 0+} f(x+\epsilon)$ und $\lim\limits_{\epsilon \to 0+} f(x-\epsilon)$, um zu betonen, daß ϵ über positive Werte sich Null nähert. Zu einem Beweis wird auf die Aufgaben 7.18-7.23 verwiesen.

Die $f(x)$ auferlegten Bedingungen (1), (2) und (3) sind *hinreichend* aber nicht notwendig und im allgemeinen in der Praxis erfüllt. Es sind gegenwärtig keine notwendigen und hinreichenden Bedingungen für die Konvergenz von Fourier-Reihen bekannt. Stetigkeit von $f(x)$ genügt *allein* nicht für die Konvergenz einer Fourier-Reihe.

UNGERADE UND GERADE FUNKTIONEN

Eine Funktion $f(x)$ heißt *ungerade*, wenn $f(-x) = -f(x)$ gilt. So sind x^3, $x^5 - 3x^3 + 2x$, $\sin x$, $\tan 3x$ ungerade Funktionen.

Eine Funktion $f(x)$ heißt gerade, wenn $f(-x) = f(x)$ gilt. So sind x^4, $2x^6 - 4x^2 + 5$, $\cos x$, $e^x + e^{-x}$ gerade Funktionen

Die Funktionen, die in Abb. 7-1(*a*) und 7-1(*b*) dargestellt sind, sind ungerade bzw. gerade, aber diejenige in Abb. 7-1(*c*) ist weder ungerade noch gerade. Bei Fourier-Reihen, die zu einer ungeraden Funktion gehören, können nur Ausdrücke in Sinus auftreten. Bei Fourier-Reihen, die zu einer geraden Funktion gehören, können nur Ausdrücke in Cosinus und (möglicherweise eine Konstante, die wir als Cosinus-Ausdruck ansehen) auftreten.

HALBINTERVALLIGE FOURIER-REIHEN IN SINUS ODER COSINUS

Eine halbintervallige Fourier-Reihe mit Sinus- oder Cosinus-Ausdrücken ist eine Reihe, in der nur Sinus-Ausdrücke bzw. nur Cosinus-Ausdrücke vorkommen. Wenn eine halbintervallige Reihe einer gegebenen Funktion gewünscht ist, ist die Funktion im allgemeinen in dem Intervall $(0, L)$ definiert [das die Hälfte des Intervalls $(-L, L)$ ist; deshalb der Name *halbintervallig*] und dann ist die Funktion ungerade oder gerade, so daß sie in der anderen

Hälfte des Intervalls definiert ist, nämlich in $(-L, 0)$. In einem solchen Fall gilt

$$\begin{cases} a_n = 0, \quad b_n = \dfrac{2}{L}\displaystyle\int_0^L f(x)\sin\frac{n\pi x}{L}\,dx & \text{für } \textit{halbintervallige Sinus-Reihen} \\[2ex] b_n = 0, \quad a_n = \dfrac{2}{L}\displaystyle\int_0^L f(x)\cos\frac{n\pi x}{L}\,dx & \text{für } \textit{halbintervallige Cosinus-Reihen} \end{cases} \tag{4}$$

DIE PARSEVALSCHE GLEICHUNG

sagt aus, daß

$$\frac{1}{L}\int_{-L}^{L}\{f(x)\}^2\,dx \quad = \quad \frac{a_0^2}{2} + \sum_{n=1}^{\infty}(a_n^2 + b_n^2) \tag{5}$$

gilt, falls a_n und b_n die Fourier-Koeffizienten sind, die zu $f(x)$ gehören und $f(x)$ die Dirichletschen Bedingungen erfüllt.

DIFFERENTIATION UND INTEGRATION VON FOURIER-REIHEN

Differentiation und Integration von Fourier-Reihen werden durch die Sätze auf Seite 7 gerechtfertigt, die im allgemeinen für Reihen entscheidend sind. Es muß jedoch betont werden, daß jene Sätze hinreichende, aber keine notwendigen Bedingungen liefern. Der folgende Satz ist für die Integration besonders nützlich.

Satz 7-2. Die Fourier-Reihe, die zu $f(x)$ gehört, kann gliedweise von a bis x integriert werden und die resultierende Reihe konvergiert gleichmäßig gegen $\int_a^x f(u)\,du$ vorausgesetzt, daß $f(x)$ stückweise stetig in $-L \leqq x \leqq L$ ist und sowohl a, als auch x in diesem Intervall liegen.

KOMPLEXE SCHREIBWEISE FÜR FOURIER-REIHEN

Wenn man die Eulerschen Gleichungen

$$e^{i\theta} = \cos\theta + i\sin\theta, \qquad e^{-i\theta} = \cos\theta - i\sin\theta \tag{6}$$

benutzt, wobei $i = \sqrt{-1}$ ist [siehe Aufgabe 1.61 auf Seite 30] kann man die Fourier-Reihe folgendermaßen schreiben:

$$f(x) \quad = \quad \sum_{n=-\infty}^{\infty} c_n\, e^{in\pi x/L} \tag{7}$$

wobei

$$c_n \quad = \quad \frac{1}{2L}\int_{-L}^{L} f(x)\, e^{-in\pi x/L}\,dx \tag{8}$$

Wenn wir die Gleichung (7) aufschreiben, nehmen wir an, daß die Dirichletschen Bedingungen erfüllt sind und weiterhin, daß $f(x)$ in x stetig sind. Wenn $f(x)$ an der Stelle x unstetig ist, wird die linke Seite von (7) ersetzt durch $\dfrac{f(x+0) + f(x-0)}{2}$.

ORTHOGONALE FUNKTIONEN

Zwei Vektoren $\mathbf{A}$ und $\mathbf{B}$ heißen *orthogonal* (senkrecht zueinander), wenn $\mathbf{A} \cdot \mathbf{A} = 0$ oder $A_1B_1 + A_2B_2 + A_3B_3 = 0$ gilt, wobei $\mathbf{A} = A_1\mathbf{i} + A_2\mathbf{j} + A_3\mathbf{k}$ und $\mathbf{B} = B_1\mathbf{i} + B_2\mathbf{j} + B_3\mathbf{k}$ sind. Dies kann auf Vektoren mit mehr als drei Komponenten verallgemeinert werden, obgleich dann die geometrische oder physikalische Anschaulichkeit verlorengeht.

In besonderen Fällen kann man an eine Funktion denken, z.B. $A(x)$, die einen Vektor mit einer *unendlichen Zahl von Komponenten* darstellt (d.h., einen *unendlich-dimensionalen Vektor*), dessen Komponentenwerte durch Ersetzen eines speziellen Wertes von x aus einem Intervall (a, b) festgelegt sind. Es ist selbstverständlich, in einem solchen Fall zwei Funktionen $A(x)$ und $B(x)$ als *orthogonal* in (a, b) zu definieren, wenn gilt:

$$\int_a^b A(x)\,B(x)\,dx = 0 \tag{9}$$

Ein Vektor $\mathbf{A}$ wird ein *Einheitsvektor* oder *normalisierter Vektor* genannt, wenn sein Betrag Eins ist, d.h., wenn $\mathbf{A} \cdot \mathbf{A} = A^2 = 1$ gilt. Erweitert man dies, so sagt man, daß die Funktion $A(x)$ normal oder normalisiert in (a, b) ist, wenn gilt:

$$\int_a^b \{A(x)\}^2\,dx = 1 \tag{10}$$

Nach dem oben Gesagten ist klar, daß man eine Menge von Funktionen $\{\phi_k(x)\}$, $k = 1, 2, 3, \ldots$, betrachten kann, die folgende Eigenschaften haben

$$\int_a^b \phi_m(x)\,\phi_n(x)\,dx = 0 \qquad m \neq n \tag{11}$$

$$\int_a^b \{\phi_m(x)\}^2\,dx = 1 \qquad m = 1, 2, 3, \ldots \tag{12}$$

In diesem Fall ist jedes Element der Menge zu jedem anderen Element der Menge orthogonal und auch normalisiert. Man nennt eine solche Menge von Funktionen eine *orthonormale Menge* in (a, b).

Die Gleichungen (*11*) und (*12*) können zusammengefaßt werden, indem man

$$\int_a^b \phi_m(x)\,\phi_n(x)\,dx = \delta_{mn} \tag{13}$$

schreibt, wobei δ_{mn} Kronecker-Symbol genannt wird, das zu 0 definiert ist, wenn $m \neq n$ und zu 1, wenn $m = n$.

Wie jeder beliebige Vektor $\mathbf{r}$ in 3 Dimensionen in eine Menge zueinander orthogonaler Einheitsvektoren $\mathbf{i}, \mathbf{j}, \mathbf{k}$ in der Form $\mathbf{r} = c_1\mathbf{i} + c_2\mathbf{j} + c_3\mathbf{k}$ entwickelt werden kann, so betrachten wir die Möglichkeit der Entwicklung einer Funktion $f(x)$ in eine Menge orthonormaler Funktionen d.h.,

$$f(x) = \sum_{n=1}^{\infty} c_n\,\phi_n(x) \qquad a \leqq x \leqq b \tag{14}$$

Solche Reihen, die *orthonormale Reihen* genannt werden, sind Verallgemeinerungen der Fourier-Reihen und sind von großem Interesse und großer Nützlichkeit, sowohl vom theoretischen als auch praktischen Standpunkt aus.

Wenn

$$\int_a^b w(x)\,\psi_m(x)\,\psi_n(x)\,dx = \delta_{mn} \tag{15}$$

ist, wobei $w(x) \geqq 0$ gilt, sagt man oft, daß die Menge $\psi_m(x)$ und $\psi_n(x)$ orthonormal ist in Bezug auf die *Dichtefunktion* oder *Gewichtsfunktion* $w(x)$. In einem solchen Fall ist die Menge der Funktionen $\{\sqrt{w(x)}\,\phi_n(x)\}$ eine orthonormale Menge in (a, b).

Fourier - Reihenentwicklung


```
In[1]:= f[t_] := If[t < 0, (t + Pi) / Pi, (Pi - t) / Pi]
        << Calculus`FourierTransform`
```

```
In[9]:= FourierTrigSeries[f[t], t, 3, FourierParameters → {1, 1 / (2 Pi)}]
```

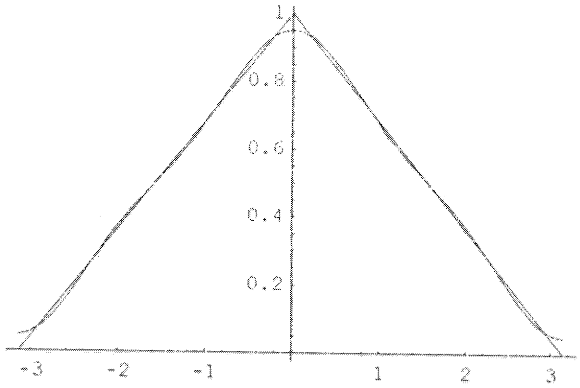
Out[9]= $$\frac{\pi + \frac{8\,\mathrm{Cos}[t]}{\pi} + \frac{8\,\mathrm{Cos}[3\,t]}{9\,\pi}}{2\,\pi}$$

```
In[14]:= Simplify[%9]
```

Out[14]= $$\frac{1}{2} + \frac{4\,\mathrm{Cos}[t]}{\pi^2} + \frac{4\,\mathrm{Cos}[3\,t]}{9\,\pi^2}$$

$$f(t) = \begin{cases} \frac{1}{\pi}(t+\pi), & -\pi < t < 0 \\ \frac{1}{\pi}(\pi - t), & 0 \leq t < \pi \end{cases}$$

```
In[10]:= Plot[{f[t], %9}, {t, -Pi, Pi}]
```



$n = 3$

Out[10]= - Graphics -

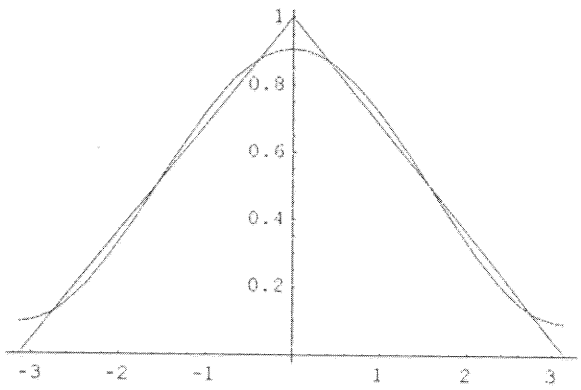
```
In[11]:= FourierTrigSeries[f[t], t, 1, FourierParameters → {1, 1 / (2 Pi)}]
```

Out[11]= $$\frac{\pi + \frac{8\,\mathrm{Cos}[t]}{\pi}}{2\,\pi}$$

```
In[13]:= Simplify[%11]
```

Out[13]= $$\frac{1}{2} + \frac{4\,\mathrm{Cos}[t]}{\pi^2}$$

```
In[12]:= Plot[{f[t], %11}, {t, -Pi, Pi}]
```



$n = 1$

Out[12]= - Graphics -

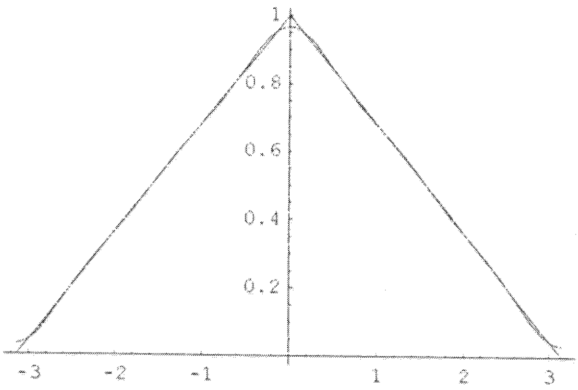
```
In[15]:= FourierTrigSeries[f[t], t, 5, FourierParameters → {1, 1 / (2 Pi)}]
```

Out[15]= $$\frac{\pi + \frac{8\,\mathrm{Cos}[t]}{\pi} + \frac{8\,\mathrm{Cos}[3\,t]}{9\,\pi} + \frac{8\,\mathrm{Cos}[5\,t]}{25\,\pi}}{2\,\pi}$$

```
In[16]:= Simplify[%]
```

Out[16]= $\frac{1}{2} + \frac{4\,\mathrm{Cos}[t]}{\pi^2} + \frac{4\,\mathrm{Cos}[3\,t]}{9\,\pi^2} + \frac{4\,\mathrm{Cos}[5\,t]}{25\,\pi^2}$

```
In[18]:= Plot[{f[t], %16}, {t, -Pi, Pi}]
```



n = 5

Out[18]= - Graphics -