1. Partielle Differentialgleichungen

Eine partielle Differentalgleichung ist eine Gleichung, welche eine unbekannte Funktion zweier oder mehrerer Variablen und ihre partiellen Ableitungen nach diesen Variablen enthält.

Die Ordnung einer PDGl. ist gegeben durch die Ordnung der höchsten vorkommenden Ableitung.

B1) $\dfrac{\partial^2 u}{\partial x \partial y} = x^2 y$

Randwertprobleme

Gesucht werden Lösungen einer PDGl., welche zusätzlichen Randbedingungen genügen.

Lineare PDGl.

$$A \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + B \frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y} + C \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} + D \frac{\partial u}{\partial x} + E \frac{\partial u}{\partial y} + F u = G,$$

wobei $A, B, \ldots, G$ Funktionen von x und y sind

(L PDGl. zweiter Ordnung in zwei Variablen)

Klassifikation v. LPDGl.:

$$B^2 - 4AC \quad \begin{array}{ll} < 0 & \text{elliptische Gl.} \\ = 0 & \text{parabolische Gl.} \\ > 0 & \text{hyperbolische Gl.} \end{array}$$

Beispiele wichtiger PDGl.

1) Laplace - Gleichung (Potentialgleichung)

$$\nabla^2 u \equiv \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial z^2} = 0$$

2) Wärmeleitungsgleichung (s. emp. Gesetze der WL)

Sei $u(t, x, y, z)$ die Temperatur eines Festkörpers zur Zeit t im Punkt (x, y, z), κ seine Wärmeleitfähigkeit, c seine spez. Wärme und ρ die Dichte.

Sei B ein beliebiger Teilbereich des Festkörpers mit der Oberfläche S

Wärmefluss durch S pro Zeiteinheit

$$\iint_S (-\kappa \nabla u) \cdot d\underline{F}\,, \qquad d\underline{F} = \underline{n}\, dF$$

Satz von Gauß:

$$\iint_S (\kappa \nabla u) \cdot d\underline{F} = \iiint_B \nabla \cdot (\kappa \nabla u) \, dV \quad (1)$$

Wärmemenge, die in B enthalten ist $= \iiint_B c \varrho u \, dV$

Zeitl. Zunahme an Wärme $= \frac{\partial}{\partial t} \iiint_B c \varrho u \, dV =$

$$= \iiint_B c \varrho \frac{\partial u}{\partial t} dV \quad (2)$$

Gleichsetzen von (1) und (2)

$$\iiint_B c \varrho \frac{\partial u}{\partial t} dV = \iiint_B \nabla \cdot (\kappa \nabla u) \, dV \quad (3)$$

gl. (3) gilt für beliebige Teilbereiche B $\Rightarrow$

$$c \varrho \frac{\partial u}{\partial t} = \nabla \cdot (\kappa \nabla u)$$

Für konstante Wärmeleitfähigkeit κ

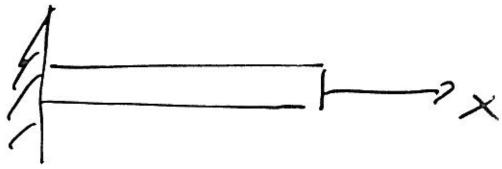
$$c \varrho \frac{\partial u}{\partial t} = \kappa \nabla \cdot (\nabla u) = \kappa \nabla^2 u$$

Setzen $k = \frac{\kappa}{c\varrho}$

$$\Rightarrow \quad \frac{\partial u}{\partial t} = k \nabla^2 u \quad \text{(Wärmeleitungsgleichung)}$$

Für einen stationären Wärmefluß, d.h. $\frac{\partial u}{\partial t} = 0$ (u ist zeitunabhängig) reduziert sich die Wärmeleitungsgl. auf die Laplacegleichung $\nabla^2 u = 0$.

3) Längsschwingung eines Balkens



$u(t,x)$ ... longitudinale Auslenkung bei x zur Zeit t

E ... Elastizitätsmodul
ϱ ... Dichte
g ... Erdbeschleunigung

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = a^2 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} \quad , \quad a^2 = \frac{E}{\varrho g}$$

Lösungsverfahren:

1) Allgemeine Lösungen von LPDGl.

Satz 1 (Superpositionsprinzip): Wenn $u_1, u_2, \ldots, u_n$ Lösungen der homogenen LPDGl. $(G=0)$ sind, dann ist auch $c_1 u_1 + c_2 u_2 + \ldots + c_n u_n$ mit den Konstanten $c_1, c_2, \ldots, c_n$ eine Lösung.

Satz 2: Die allgemeine Lösung der inhomogenen LPGl. erhält man durch Addition einer partikulären Lösung zur allg. Lösung der homogenen Gleichung.

Lösungsansatz: $u = e^{ax+by}$

Bz) $\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + 3\frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y} + 2\frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = 0$

2) Trennung der Variablen

Produktansatz: $u(t,x) = X(x)\,T(t)$

Diese Methode führt zu einer Lösung in Form einer Fourier-Rei

3) Anwendung der Laplace-Transformation

$$F(s) := \mathcal{L}f(s) = \int_0^\infty e^{-sx} f(x)\,dx$$

4) Methoden der komplexen Analysis

Numerische Behandlung von PDGl.:

Darstellung der Lösungsfkt. durch Zahlenwerte

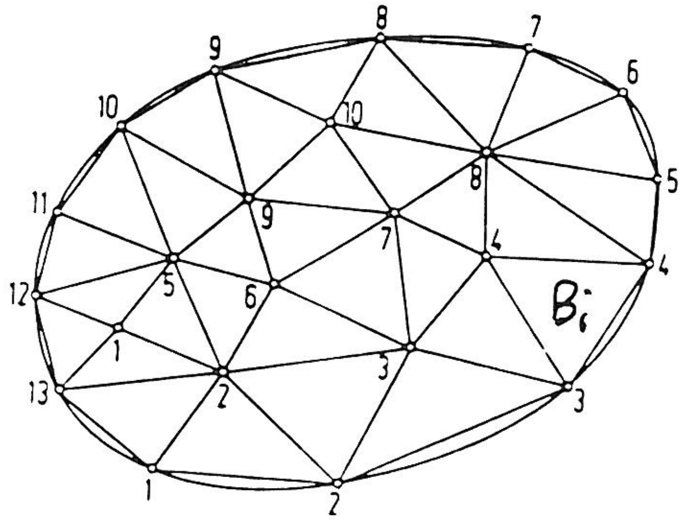
1) Diskretisierung: Ableitungen werden durch Differenzenquotienten angenähert; die PDGl. geht in eine Differenzengleichung über. Es entsteht ein algebraisches Gleichungssystem für die Werte der Lös.-Fkt. an Gitterpunkten.

2) Parameteransatz: $u(x,y) \approx \sum_{i=1}^{n} a_i \phi_i(x,y) =: U(x,y,\underline{a})$

$U(x,y,\underline{a})$ wird i. die PDGl. eingesetzt und die Koeff. a_i ermittelt. Dazu benötigt man ein Gleichungssystem, welches nach folg. Kriterien erstellt werden kann:

a) Kollokationsmethoden: Es wird das Erfülltsein der PDGl. in bestimmten Punkten gefordert

b) Methode der finiten Elemente: Die Basisfkt. $\phi_i(x,y)$ sind Null außerhalb eines kleinen Bereiches. Sie sind so gewählt, daß die Werte von u als Koeff. auftreten.



Triangulierung des Bereiches B

Einfache Basisfunktion

$$\phi_i(x,y) = \begin{cases} a_i + b_i x + c_i y & \text{in } B_i \\ 0 & \text{außerhalb} \end{cases}$$