3. Differenzenverfahren für parabolische Gleichungen

Gitter in der xt-Ebene: $(x_n, t_j) = (x_0 + n\Delta x,\ t_0 + j\Delta t)$

Maschenweiten

$\Delta := \Delta x = \Delta t$ quadr. Gitter

Def.: $u_{nj} := u(x_n, t_j)$

$$\left.\frac{\partial u}{\partial t}\right|_{(x_n, t_j)} \simeq \frac{U_{n,j+1} - U_{nj}}{\Delta t}$$

$$\left.\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}\right|_{(x_n, t_j)} \simeq \frac{U_{n+1,j} - 2U_{nj} + U_{n-1,j}}{(\Delta x)^2} = \frac{\delta_x^2 U_{nj}}{(\Delta x)^2}$$

Lösung einer approx. Differenzengleichung $U_{nj} \simeq u(x_n, t_j)$

Konsistenz: Lokaler Abbruchfehler $\to 0$ f. $\Delta x \to 0, \Delta t \to 0$

Konvergenz: $U_{nj} \to u(x_n, t_j)$, f. $\Delta x \to 0, \Delta t \to 0$

Stabilität: Lösung der a. D.G. bleibt beschränkt

Euler - Verfahren

$$\frac{dy}{dt} = f(t,y), \qquad y(0) = y_0$$

Differenzenapproximation
$$t_j = j \cdot \Delta t, \qquad j = 0, 1, \ldots$$
$$y_j = y(t_j)$$
$$f_j = f(t_j, y_j)$$

$$\frac{y_{j+1} - y_j}{\Delta t} = f_j,$$

oder

$$y_{j+1} = y_j + \Delta t\, f_j$$

$$L_{\Delta t}(y_j) := \frac{1}{\Delta t}(y_{j+1} - y_j) - f_j = 0$$

Lokaler Abbruchfehler

$$\tau_j = L_{\Delta t}(y(j\Delta t)) = \frac{1}{\Delta t}\left(y((j+1)\Delta) - y(j\Delta)\right) - f(j\Delta t, y(j\Delta t))$$

Entwicklung nach Taylor

$$\tau_j = \frac{1}{\Delta t}\left[\left(y + \Delta t \frac{dy}{dt} + \frac{(\Delta t)^2}{2}\frac{d^2y}{dt^2} + \ldots\right) - y\right] - \frac{dy}{dt}$$

$$= \frac{\Delta t}{2}\frac{d^2y}{dt^2} + \text{höhere Potenzen von } \Delta t$$

Abbruchfehler ist von erster Ordnung in Δt.

Spezialfall: $\frac{dy}{dt} = -\lambda y$, $\lambda > 0$

$$y_{j+1} = (1 - \lambda \Delta t)\, y_j$$

Verstärkungsfaktor: $\xi = \frac{y_{j+1}}{y_j}$

Stabilitätsbedingung: $|\xi| = |1 - \lambda \Delta t| \leq 1$

$$1 - \lambda \Delta t > -1$$

$$\Delta t < \frac{2}{\lambda}$$

v. Neumann - Stabilitätskriterium

Ein Differenzenmethode eines Anfangs-Randwertproblems (ARWP) mit beschränkter Lösung ist v. Neumann-stabil, wenn jede Lsg von $L_\Delta(U_{nj}) = 0$ von der Form

$$U_{nj} = \xi^j e^{i\beta n} \quad (\beta \in \mathbb{R},\ \xi \in \mathbb{C})$$

die Eigenschaft $|\xi| \leq 1$ hat. Für ein Problem mit unbeschränkter Lösung lautet das Kriterium $|\xi| \leq 1 + O(\Delta t)$.

Matrix - Stabilitätskriterium

$\underline{E}_j = (E_{1j}, E_{2j}, \ldots, E_{Nj})^T$

Fehlervektor zu $\underline{U}_j$

$$\underline{E}_{j+1} = C\underline{E}_j \qquad (*)$$

C $N \times N$-Matrix, Spektralradius $\rho(C) = \max_i |\lambda_i|$

Ein D.V. der Form $(*)$ heißt Matrix-stabil, wenn $\rho(C) \leq 1$ (im Fall beschränkter Lsgen), $\rho(C) \leq 1 + O(\Delta t)$ im Fall unbeschränkter Lsgen.

Eindimensionale Diffusionsgleichung

$$\frac{\partial u}{\partial t} = D \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} \quad , \qquad D \text{ Konstant}, \; t > 0$$

Explizite Methode (Vorwärts-Differenzen)

$$\frac{U_{n,j+1} - U_{nj}}{\Delta t} = D \frac{U_{n+1,j} - 2U_{nj} + U_{n-1,j}}{(\Delta x)^2} = D \frac{\delta_x^2 U_{nj}}{(\Delta x)^2}$$

oder

$$U_{n,j+1} = (1 + r\,\delta_x^2)\, U_{nj} \,, \qquad r = D\Delta t / (\Delta x)^2$$

Verfahren ist (bedingt) stabil, genau dann wenn $r \leq 1/2$.

Implizite Methode (Rückwärts-Diff.)

$$\frac{U_{n,j+1} - U_{nj}}{\Delta t} = D \frac{U_{n+1,j+1} - 2U_{n,j+1} + U_{n-1,j+1}}{(\Delta x)^2}$$

$$(1 - r\,\delta_x^2)\, U_{n,j+1} = U_{nj}$$

Verfahren ist stabil. Konvergenzordnung: Δt

E.M.:

$$u_t = D\,u_{xx}$$

$$u(x,0) = f(x) \qquad 0 < x < 1$$

$$u(0,t) = u(1,t) = 0$$

$$(x_n, t_j) = (n\Delta x, j\Delta t)\ , \ n = 0,1,\dots,N;\ j = 0,1,2,$$

$$N\Delta x = 1$$

$$\underline{U}_j = (U_{1j}, U_{2j}, \dots, U_{N-1,j})^T$$

E.M.:

$$\underline{U}_{j+1} = C\,\underline{U}_j, \qquad j = 0,1,\dots$$

mit

$$\underline{U}_0 = (f_1, f_2, \dots, f_{N-1})^T$$

und

$$C = \begin{pmatrix} 1-2r & r & & & 0 \\ r & 1-2r & r & & \\ & r & 1-2r & r & \\ & & \ddots & \ddots & \ddots \\ & & & & r \\ 0 & & & r & 1-2r \end{pmatrix}$$

I.M. $$u_t = D\, u_{xx}$$

$$u(x,0) = f(x) \qquad 0 < x < 1$$

$$u_x(0,t) = p(t), \quad u_x(1,t) = q(t), \quad t > 0$$

$$(x_n, t_j) = (n\Delta x, j\Delta t), \quad n = -1, 0, 1, \ldots, N, N+1$$
$$j = 0, 1, 2, \ldots$$

$$N\Delta x = 1$$

„Geisterpunkte": x_{-1}, x_{N+1} und Approx. der Randbed. durch zentrale Differenzen:

$$\frac{U_{1,j} - U_{-1,j}}{2\Delta x} = p(t_j), \quad \frac{U_{N+1,j} - U_{N-1,j}}{2\Delta x} = q(t_j)$$

I.M.: $$-r\,U_{n-1,j+1} + (1+2r)\,U_{n,j+1} - r\,U_{n+1,j+1} = U_{nj}$$

Elimination von $U_{-1,j+1}$ und $U_{N+1,j+1}$ durch

$$U_{-1,j+1} = U_{1,j+1} - 2\Delta x\, p_{j+1}$$

$$U_{N+1,j+1} = U_{N-1,j+1} + 2\Delta x\, q_{j+1}$$

Resultierendes System

$$\begin{pmatrix} 1+2r & -2r & & & & 0 \\ -r & 1+2r & -r & & & \\ & -r & 1+2r & -r & & \\ & & \ddots & \ddots & \ddots & \\ & & & & 1+2r & -r \\ 0 & & & & -2r & 1+2r \end{pmatrix} \begin{pmatrix} U_{0,j+1} \\ U_{1,j+1} \\ \vdots \\ \vdots \\ U_{N,j+1} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} U_{0j} - 2\Delta x r p_j \\ U_{1j} \\ \vdots \\ \vdots \\ U_{Nj} + 2\Delta x r q_j \end{pmatrix}$$

Crank-Nicolson

$$u_t = D\, u_{xx}$$

$$u(x,0) = f(x), \quad 0 < x < 1$$

$$u(0,t) = p(t), \quad u(1,t) = q(t)$$

$$(x_n, t_j) = (n\Delta x, j\Delta t) \qquad n = 0, 1, \dots, N; \; j = 0, 1, \dots$$

$$N \Delta x = 1$$

Setzen:

$$U_{n0} := f(x_n) \qquad n = 1, 2, \dots, N-1$$

$$U_{00} := (f(0) + p(0))/2$$

$$U_{N0} := (f(1) + q(0))/2$$

$$U_{0j} := p(t_j)$$

$$U_{Nj} := q(t_j)$$

Gewichtete Differenzen - Methode

$$U_{n,j+1} - U_{nj} = r\left[(1-w)\,\delta_x^2 U_{nj} + w\,\delta_x^2 U_{n,j+1}\right], \quad r = \frac{D\Delta t}{\Delta x^2}$$

Fall $w = 1$: I. M.

Fall $w = 0.5$: C-N

Unter Einbeziehung von Rand- u. Anfangsbed. erhält man

$$\begin{pmatrix} 1+2wr & -wr & & & & 0 \\ -wr & 1+2wr & -wr & & & \\ & -wr & 1+2wr & -wr & & \\ & & & \ddots & & \\ & 0 & & -wr & 1+2wr & -wr \\ & & & & -wr & 1+2wr \end{pmatrix} \begin{pmatrix} U_{1,j+1} \\ U_{2,j+1} \\ \vdots \\ \vdots \\ U_{N-1,j+1} \end{pmatrix}$$

$$= (D_1, D_2, \dots, D_{N-1})^T$$

wobei

$$D_1 := U_{1j} + (1-w)\,r\,\delta_x^2 U_{1j} + wr\,U_{0,j+1}$$

$$D_n := U_{nj} + (1-w)\,r\,\delta_x^2 U_{nj}, \quad n = 2, \dots, N-2$$

$$D_{N-1} := U_{N-1,j} + (1-w)\,r\,\delta_x^2 U_{N-1,j} + wr\,U_{N,j+1}$$

Crank - Nickolson

$$\frac{U_{n,j+1} - U_{nj}}{\Delta t} = \frac{D}{2} \frac{\delta_x^2 U_{nj} + \delta_x^2 U_{n,j+1}}{(\Delta x)^2}$$

$$\left(1 - \frac{r}{2}\delta_x^2\right) U_{n,j+1} = \left(1 + \frac{r}{2}\delta_x^2\right) U_{nj}$$

Verfahren ist stabil. Konvergenzordnung $(\Delta t)^2$

<u>Zweidimensionale Diffusiongleichung</u>

$$\frac{\partial u}{\partial t} = D\left(\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2}\right)$$

Setzen $(x_m, y_n, t_j) = (m \cdot \Delta, n \cdot \Delta, j\Delta t)$

$$U_{mnj} \approx u_{mnj} = u(x_m, y_n, t_j)$$

Explizite Methode (V.D.)

$$U_{mn,j+1} = \left[1 + r(\delta_x^2 + \delta_y^2)\right] U_{mnj}, \quad r = \frac{D\Delta t}{\Delta^2}$$

Verfahren ist (bedingt) stabil, g.d.wenn $r \leq 1/4$. Konv. Ordnung Δt

Implizite Methode (R. D.)

$$\left[1 - r\left(\delta_x^2 + \delta_y^2\right)\right] U_{mn,j+1} = U_{mnj}$$

Verfahren ist stabil. Konvergenzordnung: Δt

Crank-Nicolson-Methode

$$\left[1 - \frac{r}{2}\left(\delta_x^2 + \delta_y^2\right)\right] U_{mn,j+1} = \left[1 + \frac{r}{2}\left(\delta_x^2 + \delta_y^2\right)\right] U_{mnj}$$

Verfahren ist stabil. Konvergenzordnung: $(\Delta t)^2$

---

*

- Explizite Methode: Voranschreiten in der Zeit. Nachteil: Bedingte Stabilität
- Implizite Methoden sind stabil, erfordern jedoch in jedem Schritt eine Matrixinversion.
- 1-dim impl. Methoden: tridiagonale Struktur
  2-dim —"— : pentadiagonale —"—

Alternating direction implicit (ADI) method

Durch Einführung eines „Zwischenwertes" $U^*_{mn,j+1}$ wird die tridiagonale Struktur erhalten.

$$\left(1 - \frac{r}{2}\delta_x^2\right) U^*_{mn,j+1} = \left(1 + \frac{r}{2}\delta_y^2\right) U_{mnj}, \quad n = 1, \ldots, N-1$$

$$\left(1 - \frac{r}{2}\delta_x^2\right) U_{mn,j+1} = \left(1 + \frac{r}{2}\delta_y^2\right) U^*_{mn,j+1}, \quad m = 1, \ldots, M-1$$

Verfahren ist stabil. Konvergenzordnung: $(\Delta t)^2$