LINEARE DIFF.-GLEICHUNGSSYSTEME

B1) Dgl. 2. Ordnung:

$$\frac{d^2x}{dt^2} + a\frac{dx}{dt} + bx = f(t), \qquad a,b \ldots \text{Konstante}$$

kann als Dgl.-System 1. Ordnung geschrieben werden:

$$\frac{dy_1}{dt} = y_2$$

$$\frac{dy_2}{dt} = -a\,y_2 - b\,y_1 + f(t)$$

Matrixschreibweise:

$$\frac{d}{dt}\begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -b & -a \end{pmatrix}\begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 \\ f(t) \end{pmatrix}$$

$$\frac{d\vec{y}}{dt} = A\vec{y} + \vec{p}(t)$$

B2) Lineares Kaskadenmodell eines Einzugsgebiets (NASH, 1957)

Kontinuitätsgleichung

$$\frac{ds}{dt} = x - y,$$

s ... Speicherrate

y ... Zuflussrate

x ... Abflussrate

Lineare Speicher-Abfluss-Beziehung: $x(t) = a\,s(t)$

Durch Einsetzen in die Kont.-Gleich.:

$$\frac{dx}{dt} + a\,x = a\,y$$

Diese Zustandsgleichung ist eine lin. Dgl. 1. Ordnung mit der Lösung

$$x(t) = x_0 e^{-at} + \int_{t_0}^{t} a\,y(\tau)\,e^{-a(t-\tau)}\,d\tau,$$

wobei $x_0 = x(t_0)$ ist

x_i = Abfluss des i-ten Speichers

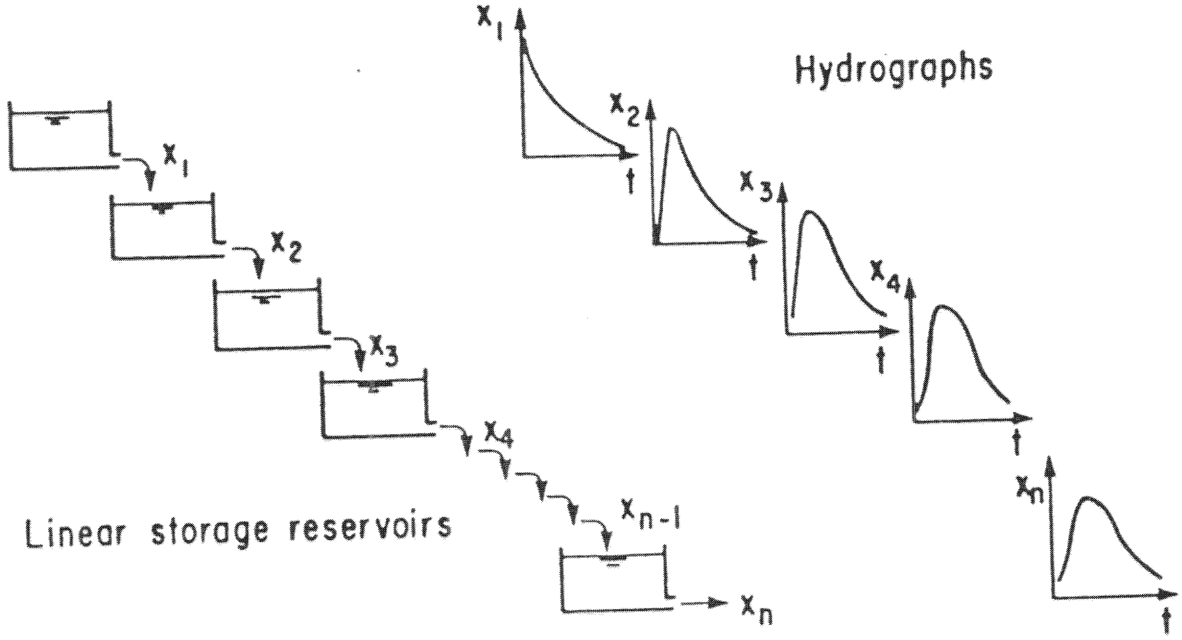

Figure 2. *The linear reservoir cascade (adopted from Chow, 1964).*

Die Speicherkaskade wird durch folg. Dgl.-System beschrieben:

$$\frac{dx_1}{dt} + a\,x_1 = a\,y$$

$$\frac{dx_2}{dt} + a\,x_2 = a\,x_1$$

$$\vdots$$

$$\frac{dx_n}{dt} + a\,x_n = a\,x_{n-1}$$

Für $n = 3$

$$\frac{d}{dt}\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -a & 0 & 0 \\ a & -a & 0 \\ 0 & a & -a \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} + a\begin{pmatrix} y \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix},$$

$$\dot{\vec{x}} = A\vec{x} + \vec{b}(t)$$

Wir betrachten zunächst die homogene Gleichung

$$\frac{d\vec{y}}{dt} = A\vec{y} \quad , \quad \vec{y}(0) = \vec{y}_0 , \qquad (H)$$

welches formal auf dieselbe Weise gelöst werden kann, wie die skalare DGl. Die Lösung von (H) lautet

$$\vec{y}(t) = e^{At}\vec{y}_0 ,$$

wobei die Matrixexponentialfunktion $t \mapsto e^{At}$ durch die unendliche Reihe

$$e^{At} = I + At + \frac{A^2t^2}{2!} + \ldots + \frac{A^nt^n}{n!} + \ldots$$

gegeben ist.

In MATLAB erhält man die Matrixexponentialfunktion einer quadratischen Matrix A mittels

expm(A).

Ist die Matrix A diagonalisierbar, $D = B^{-1}AB$, dann gilt

$$e^{At} = Be^{Dt}B^{-1},$$

$$e^{Dt} = \mathrm{diag}\left(e^{\lambda_1 t}, \ldots, e^{\lambda_n t}\right).$$

Die Lösung der inhomogenen Dgl.

$$\frac{d\vec{y}}{dt} = A\,\vec{y}(t) + \vec{p}(t) \,, \quad \vec{y}(0) = \vec{y}_0$$

lautet

$$\vec{y}(t) = e^{At}\,\vec{y}_0 + \int_0^t e^{A(t-s)}\,\vec{p}(s)\,ds.$$

B1) Wir betrachten eine chemische Reaktion, bei der ein Stoff A in den Stoff B und dieser in den Stoff C übergeht. Die jeweils vorhandenen Stoffmengen bezeichnen wir mit y_1, y_2 und y_3. Für die Änderungsraten soll gelten:

$$A \rightarrow B \rightarrow C$$

$$\frac{dy_1}{dt} = -k_1 y_1$$

$$\frac{dy_2}{dt} = k_1 y_1 - k_2 y_2$$

$$\frac{dy_3}{dt} = k_2 y_2$$

$$A = \begin{bmatrix} -k_1 & 0 & 0 \\ k_1 & -k_2 & 0 \\ 0 & k_2 & 0 \end{bmatrix}$$

Die Eigenwerte von A lauten

$$\lambda_1 = -k_1 \,, \qquad \lambda_2 = -k_2 \,, \qquad \lambda_3 = 0$$

Als Anfangsbedingungen nehmen wir an:

$$y_1(0) = m_0, \quad y_2(0) = y_3(0) = 0$$

Mittels der Symbolic Toolbox von MATLAB erhält man folgende Lösungen

```
ans =   y(t) =

[                                            exp(-t*k1)*m0]
[              k1*(exp(-t*k2)-exp(-t*k1))/(k1-k2)*m0]
[  -(k1*exp(-t*k2)-k2*exp(-t*k1)-k1+k2)/(k1-k2)*m0]
```

DIE LINIENMETHODE (engl. method of lines)

besteht in der Diskretisierung der räumlichen Variablen. Man erhält so ein System von gewöhnlichen Dgl. in t.

Bsp.: $$\frac{\partial u}{\partial t} = \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}, \quad 0 < x < 1, \quad t > 0$$

$$u(0,x) = f(x), \qquad 0 < x < 1$$

$$u(t,0) = u(t,1) = 0 \qquad t > 0$$

Wahl der Maschenweite $\Delta x = 0.25$

$$x_n = n \Delta x, \quad n = 0, 1, 2, 3, 4$$

$U_n(t) \simeq u(t, x_n)$ Approximation von $u(t,x)$, $x = x_n$

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} \simeq \frac{u(t, x+\Delta x) - 2u(t,x) + u(t, x-\Delta x)}{(\Delta x)^2}$$

$$\left.\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}\right|_{x = x_n} \simeq \frac{U_{n+1}(t) - 2U_n(t) + U_{n-1}(t)}{(\Delta x)^2}$$

ergibt folgendes Dgl.-System:

$$\dot{U}_1 = \frac{1}{(\Delta x)^2}(-2U_1 + U_2)$$

$$\dot{U}_2 = \frac{1}{(\Delta x)^2}(U_1 - 2U_2 + U_3)$$

$$\dot{U}_3 = \frac{1}{(\Delta x)^2}(U_2 - 2U_3)$$

In Matrixschreibweise:

$$\dot{\vec{U}} = (\Delta x)^{-2} \begin{bmatrix} -2 & 1 & 0 \\ 1 & -2 & 1 \\ 0 & 1 & -2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} U_1 \\ U_2 \\ U_3 \end{bmatrix} = A \vec{U} \qquad (*)$$

Anfangsbed.

$$\vec{U}(0) = \vec{U}_0 = \left(f(x_1), f(x_2), f(x_3) \right)^T$$

Lösung von (*):

$$\vec{U}(t) = e^{At} \vec{U}_0$$