Angewandte Mathematik f. Ingenieure – SS 2009

UE – Aufgaben

1) Man bestimme die Werte von a so, dass das folg. lineare Gleichungssystem a) keine Lösung, b) mehr als eine Lösung, c) eine eindeutige Lösung besitzt:

$$\begin{aligned} x + y - z &= 1 \\ 2x + 3y + az &= 3 \\ x + ay + 3z &= 2. \end{aligned}$$

2) Bestimmen Sie (mit Papier und Bleistift) die allgemeine Lösung des folg. Gleichungssystems:

$$\begin{aligned} x + 2y - z &= 0 \\ 2x + 5y + 2z &= 0 \\ x + 4y + 7z &= 0 \\ x + 3y + 3z &= 0 \end{aligned}$$

3) Berechnen Sie (mit Papier und Bleistift) die Inversen folgender Matrizen, falls diese existieren:

$$\begin{pmatrix} -5 & -3 \\ 7 & 4 \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} a_1 & & & 0 \\ & a_2 & & \\ & & \ddots & \\ 0 & & & a_n \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} \cos\phi & -\sin\phi & 0 \\ \sin\phi & \cos\phi & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

4) Berechnen Sie (mit Papier und Bleistift) die Eigenwerte und Eigenvektoren der Matrix

$$\begin{pmatrix} 1 & -2 \\ -2 & 4 \end{pmatrix}.$$

5) Unter Verwendung der MATLAB-Funktion eig(A) bestimmen Sie die Eigenwerte und Eigenvektoren der Matrix

$$A = \begin{pmatrix} 5 & 7 & -5 \\ 0 & 4 & -1 \\ 2 & 8 & -3 \end{pmatrix}.$$

Verifizieren Sie für diese Matrix den Satz 15-15 (Schaum's Outline Matrizen) $A = BDB^{-1}$.

6) Bestimmen Sie eine spezielle Lösung des Gleichungssystems aus Aufgabe 2 mittels der Pseudoinversen (MATLAB-Befehl pinv(A)).

7) Bei einer Bodentemperatur von 20°C wurde der verfügbare Phosphorgehalt für Pflanzen y [ppm] und drei verschiedene Phosphorfraktionen x_1, x_2, x_3 [ppm] im Boden gemessen. Die 18 Beobachtungssätze lauten:

x_1	x_2	x_3	y	x_1	x_2	x_3	y
0.4	53	158	64	12.6	58	112	51
0.4	23	163	60	10.9	37	111	76
3.1	19	37	71	23.1	46	114	96
0.6	34	157	61	23.1	50	134	77
4.7	24	59	54	21.6	44	73	93
1.7	65	123	77	23.1	56	168	95
9.4	44	46	81	1.9	36	143	54
10.1	31	.117	93	26.8	58	202	168
11.6	29	173	93	29.9	51	124	99

Wir unterstellen das lineare Modell $y = b_0 + b_1 x_1 + b_2 x_2 + b_3 x_3$.
Schätzen Sie die Koeffizienten b_0, b_1, b_2 und b_3.

8) In der folgenden Tabelle sind Abflußmengen y (in m^3/s) und die Wasserstände x (in Meter) aufgelistet

i	x_i	y_i
1	1.98	150
2	2.10	144
3	2.25	205
4	2.70	388
5	3.05	750
6	3.30	653
7	3.35	580
8	3.95	920
9	4.12	1130
10	4.25	1040

Es wird angenommen, dass die Daten einem Modell

$$E[Y] = b_0 x^{b_1}$$

folgen. Der Einfachheit halber passe man ein Modell

$$\log y_i = \log b_0 + b_1 \log x_i$$

an die Daten an. Stellen Sie die Ausgleichskurve und die Messwerte in einem Diagramm grafisch dar.

Kapitel 2: Differentialgleichungen und Differentialgleichungssysteme

9) Eine lineare Speicherkaskade wird durch das folgende Dgl.-System beschrieben

$$\frac{dx_1}{dt} + a\,x_1 = a\,y$$

$$\frac{dx_2}{dt} + a\,x_2 = a\,x_1$$

$$\frac{dx_3}{dt} + a\,x_3 = a\,x_2$$

mit der Speicherkonstante $a = 0.5$. Mit Hilfe der Matrix-exponentialfunktion (MATLAB: expm(A)) bestimmen Sie die Lösung des Dgl.-Systems für $y(t) \equiv 2\,cm/h$. Anfangbedingung $\vec{x}_0 = (1.2\ 0\ 0)^T$. Stellen Sie die Lösungskurven durch ein Zeitdiagramm dar. Die Integrationen führen Sie mit der Symbolic Toolbox aus.

10) Eine nichtlineare Speicherkaskade wird durch das Dgl.-System

$$\frac{dx_1}{dt} + a\,x_1^{\Delta} = a\,y$$

$$\frac{dx_2}{dt} + a\,x_2^{\Delta} = a\,x_1^{\Delta}$$

$$\frac{dx_3}{dt} + a\,x_3^{\Delta} = a\,x_2^{\Delta}$$

beschrieben. Integrieren Sie das System mit der MATLAB-

Routine ode45 für die Werte $\alpha = 0.5$, $\beta = 1.6$ und $y(t) \equiv 2$ cm/h. Anfangsbedingung $\vec{x}_0 = (1.2, 0, 0)^T$, Stellen Sie die Lösungskurven durch ein Zeitdiagramm dar.

11) Numerische Integration der Dgl. 2. Ordnung

$$\ddot{x} + \frac{x}{\sqrt{1+x^2}} = 0$$

mit den Anfangsbedingungen $x(0) = 1$ und $\dot{x}(0) = 0$

Bilden Sie ein äquivalentes Dgl.-System 1. Ordnung und integrieren Sie das System mit der MATLAB-Routine ode45 auf dem Intervall $[0, 2\pi]$.

12) Integrieren Sie nach der Linienmethode ($\Delta x = 1/20$)

$$\frac{\partial u}{\partial t} = \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}, \quad 0 < x < 1, \quad t > 0$$

$$u(0, x) = x^2(1 - x)$$
$$u(t, 0) = 0, \quad u(t, 0) = \sin^3 t.$$

(Inhomogene Randbedingungen 1. Art).

13) Nach der <u>expliziten Methode</u> Bestimmen Sie die Lösung des Anfangs-Randwertproblems

$$\frac{\partial u}{\partial t} = \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}, \quad 0 < x < 1, \quad t > 0$$

$$u(0, x) = x^5(1-x)$$

$$u(t, 0) = \frac{t}{5}, \quad u(t, 1) = 0$$

Maschenweite $\Delta x = 0.05$. Stellen Sie die approximative Lösung für die Zeitpunkte $t = 0.3$ und $t = 0.6$ grafisch dar

14) Lösen Sie das Problem aus Aufgabe 13 nach der <u>Crank-Nicolson-Methode</u> und vergleichen Sie die Ergebnisse.