

INFO zur VU 835.104 (WS 11/12)

für alle Studierenden der Forstwirtschaft sowie der Holz- und Naturfasertechnologie im 1. Semester an der BOKU

Herzlich willkommen an der Universität für Bodenkultur!

*Auf dieser Seite finden Sie kurz gefaßt die wesentlichen Informationen
zu Ihrer Grundausbildung im Pflichtfach Mathematik an der BOKU.*

*Auf den nächsten beiden Seiten finden Sie im
Detail den Modus der Lehrveranstaltungen.*

Vorlesungsübung Mathematik I (VU 835.104) – Pflichtlehrveranstaltung (3 Semesterwochenstunden, immanenter Prüfungscharakter, Anwesenheitspflicht)

Lehrveranstaltungsleiter: Ao.Univ.Prof. Mag. Dr. Gerald KUBA

Die VU (insgesamt 45 akad. Stunden) besteht aus einem **1-stündigen Vorlesungsteil**, der auf die *zweite* Semesterhälfte *geblockt* wird, und einem **2-stündigen Übungsteil** während des ganzen Semesters, der aufgrund der lehrveranstaltungsfreien Tage sowie der internen Prüfungstermine auch (leicht) geblockt wird.

↔ **Vorlesungsteil** immer am **Donnerstag 14:15 - 15:45** in **EH 04**

↔ **Übungsteil (105 bis 120 Minuten)** in der Regel am **Freitag ab 16:00**

in **EH 02** und **EH 03**

Im *Übungsteil* (zwei Gruppen) führen die Studierenden vorbereitete Aufgaben *freiwillig* an der Tafel vor und erklären sie (unterstützt vom LVA-Leiter und Tutoren) ihren Kollegen.

In der *ersten Semesterhälfte* werden nur Aufgaben durchgenommen, die mit ausreichenden Kenntnissen und Fertigkeiten aus der Schule ohne Schwierigkeiten bewältigbar sind. Für Studienanfänger mit *unzureichenden Mathematik-Vorkenntnissen* wird der **Mathematik Brückenkurs** (VO 835.091, freiwillig, 1 SWSt.) angeboten. Diese Vorlesung wird auf die *erste* Semesterhälfte *geblockt* und zum *Termin des Vorlesungsteils* der VU abgehalten.

↔ **Beginn des Brückenkurses: Donnerstag, 13. Oktober**

BEGINN der Pflichtlehrveranstaltung: Freitag, 7. Oktober

↔ **Vorzubereiten** sind die Nummern **1 bis 11** aus der *Aufgabensammlung!*

Erster Vorlesungsteil der Pflichtlehrveranstaltung: 17. November

ZWISCHENTEST am 18. November 2011 von 16:00 bis 17:15

ABSCHLUSSTEST am 3. Februar 2012 von 16:00 bis 17:40

- Die **Anmeldung** zu der Pflichtlehrveranstaltung **VU 835.104** erfolgt über BOKU ONLINE vom 5. September bis 10. Oktober.

- Das **Skriptum** zu *Brückenkurs + VU* ist in der **Lehrmittelstelle** ("BOKU Shop") Peter-Jordan-Straße 76 erhältlich. Die **Aufgabensammlung** zur *VU* wird gratis als PDF den Studierenden zur Verfügung gestellt. [↔ AUFG2011.PDF]

Struktur und Modus der VU 835.104

Die **Vorlesungsübung Mathematik I** ist eine **Pflichtlehrveranstaltung** (3 Semesterwochenstunden, immanenter Prüfungscharakter, Anwesenheitspflicht) für die Studierenden der *Forstwirtschaft* sowie der *Holz- und Naturfasertechnologie* im ersten Semester.

Die **VU** (insgesamt 45 akad. Stunden) besteht aus einem **1-stündigen Vorlesungsteil**, der auf die *zweite* Semesterhälfte *geblockt* wird, und einem **2-stündigen Übungsteil** während des ganzen Semesters, der aufgrund der lehrveranstaltungsfreien Tage sowie der während zweier Übungstermine abgehaltenen schriftlichen Prüfungen auch (ein wenig) *geblockt* wird.

Im *Übungsteil* führen die Studierenden vorbereitete Aufgaben freiwillig an der Tafel vor und erklären sie (unterstützt vom LVA-Leiter und Tutoren) ihren Kollegen.

In der *ersten Semesterhälfte* werden nur Aufgaben durchgenommen, die allein mit *schulmathematischen* Kenntnissen und Fertigkeiten bewältigbar sind. (Für Studienanfänger mit unzureichenden Mathematik-Vorkenntnissen wird begleitend dazu der *Mathematik Brückenkurs* VO 835.091 angeboten.) In der *zweiten Semesterhälfte* werden Aufgaben zu ausgewählten Kapiteln aus *Ingenieurmathematik* gerechnet.

Anwesenheit. Während der gesamten VU herrscht *Anwesenheitspflicht*. Jedoch wird nur in den Übungen an den Freitagen eine Anwesenheitskontrolle durchgeführt. Das Fehlen in einer Übungseinheit ist nur aus gravierenden Gründen (Krankheit, Unfall, Prüfung, familiärer Notfall, Gerichtstermin o.ä.) gestattet und muß mit einer schriftlichen Begründung (ärztliches Attest o.ä.) ehebaldigst entschuldigt werden. **Wer zwei Freitagstermine unentschuldigt oder vier Freitagstermine insgesamt versäumt, wird automatisch von der LVA abgemeldet und bekommt kein Zeugnis.** In Härtefällen (längerer Krankenstand o.ä.) kann diese Regelung nach Rücksprache mit dem Lehrveranstaltungsleiter individuell aufgehoben werden.

Tafelmeldungen. Die Studierenden haben für jede Übungseinheit ein vorgeschriebenes Pensum an Aufgaben vorzubereiten. In der Regel meldet sich zu jeder Aufgabe ein Studierender *freiwillig* an die Tafel, um seine Lösung der Aufgabe mit den nötigen Erläuterungen dem Auditorium vorzuführen. Bei zufriedenstellender Tafelmeldung wird ein *Tafelpunkt* gutgeschrieben, ansonsten gibt es keinen Tafelpunkt. Sollte die Bereitschaft, sich an die Tafel zu melden, im Laufe des Semesters intolerabel schwinden, so können im Rahmen einer *Ausnahmeregelung* Studierende auch an die Tafel gerufen werden, wobei dann bei *negativen* Leistungen an der Tafel *Punkte* von der Gesamtpunktezahl *abgezogen* werden.

Schriftliche Tests. Zur Hälfte des Semesters wird ein *Zwischentest* (75 Minuten) und am Ende des Semesters ein *Abschlußtest* (100 Minuten) abgehalten. In beiden Tests werden *Rechenaufgaben* ähnlich den in den Übungen durchgenommenen gestellt. Der *Zwischentest* (kurze Rechnungen) wird ergebnisorientiert korrigiert. Der *Abschlußtest* (längere Rechnungen) wird detailliert korrigiert. Die *maximale Testpunktzahl* beträgt **12** beim *Zwischentest* und **24** beim *Abschlußtest*. Als *Hilfsmittel* bei den Tests dürfen das mit eigenen Notizen versehene *Skriptum* (keine losen Blätter!) und ein *Standardtaschenrechner* (ohne Algebraprogramme!) verwendet werden. Ein *entschuldigt versäumter Zwischentest* kann (nach fristgerechter Anmeldung) zu einem anderen Termin (ca. Mitte Januar) während des Semesters nachgeholt werden. Ein *entschuldigt versäumter Abschlußtest* kann am Beginn des Sommersemesters nachgeholt werden.

Zeugnisnote. *Abschlußtestpunkte plus Tafelpunkte plus Zwischentestpunkte* ergeben die *Gesamtpunktezahl*. Ein **positiver Abschluß** der VU wird erzielt, wenn sowohl die

Abschlußtestpunktezahl mindestens 8, als auch die
Gesamtpunktezahl mindestens 18 beträgt.

Es gilt dann folgende **Notenskala** :

4 **18 bis 22 Punkte**
3 **23 bis 29 Punkte**
2 **30 bis 34 Punkte**
1 **35 oder mehr Punkte**

Nachttest. Auch wenn auf diese Weise kein positiver Abschluß der Lehrveranstaltung erreicht wurde, ist ein solcher *unter verschärften Bedingungen* mit Hilfe eines *Nachttests* am Beginn des Sommersemesters immer noch möglich. (Letzte Chance!)

Der Nachttest entspricht dem verpatzten Abschlußtest, dauert allerdings nur 90 Minuten und wird auch nicht bepunktet. Vielmehr resultiert die Zeugnisnote direkt aus den beim Nachttest erbrachten Leistungen. Der Nachttest besteht aus vier Aufgaben und gilt als *bestanden*, wenn *mindestens zwei* Aufgaben *richtig* oder *fast richtig* gelöst wurden. Bei bestandenem Nachttest ist die Zeugnisnote *Genügend* oder *Befriedigend* oder *Gut*, je nachdem, ob genau *zwei* oder *drei* oder *vier* Aufgaben *mindestens fast richtig* gelöst wurden. Im Falle, daß alle *vier* Aufgaben *völlig fehlerfrei* gelöst wurden, ist die Zeugnisnote *Sehr Gut*. Bei nicht bestandenem oder versäumtem Nachttest ist die Zeugnisnote definitiv *Nicht Genügend*.

Ersatztest. Sollte der Abschlußtest *versäumt* worden sein, so kann derselbe durch einen Ersatztest nachgeholt werden, falls die Abwesenheit *rechtzeitig* und *glaubhaft* entschuldigt wird. (Andernfalls gilt der versäumte Abschlußtest einem verpatzten gleichwertig und der Ersatztest wird als Nachttest behandelt!) Der Ersatztest entspricht völlig dem versäumten Abschlußtest und ersetzt diesen in der Notenfindung. Der Ersatztest dauert jedoch nur 90 Minuten, da er gleichzeitig mit dem Nachttest abgehalten wird. Wer dem Abschlußtest und dem Ersatztest fernbleibt, wird als abgemeldet eingestuft und bekommt *kein Zeugnis*.

Anrechnung des Zwischentests. Wer auf den Zwischentest mindestens **6** Punkte erreicht, bekommt *auf Wunsch* ein positives Zeugnis über den **Brückenkurs Mathematik** (VO 835.091) ausgestellt. *Notenskala* :

4 6 Punkte
3 7 oder 8 Punkte
2 9 oder 10 Punkte
1 11 oder 12 Punkte

Alternativ kann ein Zeugnis über die VO 835.091 auch (bis ein Jahr nach Semesterende) mit einer mündlichen Prüfung erworben werden.

Im Gegensatz dazu wird für die VU 835.104 wegen des immanenten Prüfungscharakters der Lehrveranstaltung und der permanenten Anwesenheitspflicht, die das Fernbleiben vom Abschlußtest ohne zwingende Gründe (Krankheit o.ä.) nicht gestattet, außer dem Nachttest keine mündliche oder schriftliche Prüfung nach Ende der Lehrveranstaltung angeboten.

G. Kuba

**Mathematik
für Forstwirte sowie für
Holz- und Naturfasertechnologen**

AUFGABENSAMMLUNG

zur VU 835.104

**Institut für Mathematik
Department für integrative Biologie**

Universität für Bodenkultur

WS 2011/12

[1. UE-Einheit] Trigonometrie

Zur Winkelmessung in der Praxis verwendet man gerne (oft nebeneinander) das klassische *Gradmaß* und das neuzeitliche *Gonmaß* ("Neugrad"). Dem *rechten Winkel* $\frac{\pi}{2}$ entsprechen **90 Grad** bzw. **100 Gon**. Griechisch: $\gamma\omega\nu\lambda\alpha$ — *Winkel(maß)*.

1. Stellen Sie die Winkel π , $\frac{\pi}{2}$, $\frac{\pi}{3}$, $\frac{\pi}{4}$, $\frac{\pi}{6}$ und die Winkel $\frac{5\pi}{3}$, $\frac{3\pi}{5}$, $\frac{7}{6}$, 5 in *Grad* und in *Gon* dar.
2. Die im Gradmaß gemessenen Winkel 135° , 210° , 35° , 25° , 15° , e° , π° sind in das natürliche *Bogenmaß* und in das *Gonmaß* zu übertragen.
3. Ein 10 Meter hoher (lotrechter) Baum wirft auf die waagrechte Standfläche einen 17 Meter langen Schatten. Wie hoch ist ein anderer Baum, der gleichzeitig einen 23 Meter langen Schatten wirft? Wie groß ist der Einfallswinkel des Lichts in Bezug zur Standfläche?
4. Von einem *rechtwinkligen* Dreieck kennt man einen spitzen Winkel, der im Gradmaß exakt 33° beträgt. Ferner beträgt die Länge der längsten Seite des Dreiecks exakt 136 Längeneinheiten. Berechnen Sie den *Flächeninhalt* des Dreiecks.
5. Von einem Dreieck kennt man die Längen 6 und 8 Einheiten zweier anstoßender Seiten sowie den von ihnen eingeschlossenen Winkel, der 70 Grad beträgt. Man berechne den Umfang des Dreiecks.
6. Die Längen der Diagonalen eines Rhombus betragen 12 und 16 Einheiten. Man berechne Umfang, Flächeninhalt und alle Seitenwinkel des Rhombus.
7. Von einem Deltoid kennt man die Längen zweier Seiten, die 8 und 15 Einheiten betragen, sowie den Flächeninhalt, der 120 Quadrateinheiten beträgt. Man berechne die vier Winkel des Deltoids.
8. Ein Tortenstück (kissektorförmige Grundfläche) soll gerecht halbiert werden. Der Schnitt soll aber nicht symmetrisch durch die Spitze geführt werden, sondern *rechtwinklig* auf die symmetrische Schneiderichtung. In welchem Abstand von der Tortenspitze ist das Messer zu setzen, um auf diese Weise eine exakte Halbierung des Tortenstücks zu erreichen?
9. Auf einer genau nach Süden ausgerichteten und vertikal angebrachten Sonnenuhr ist der schattenwerfende Stab der Länge 78 Zentimeter nach unten mit einem Winkel zum Lot von 60 Grad geneigt. Wie lange ist der genau zu Mittag geworfene Schatten, wenn das Sonnenlicht unter 52 Grad einfällt?
10. Von einem Berg herab sieht man zwei in einer horizontalen Ebene liegenden Orte A und B , die 2 Kilometer von einander entfernt sind. Und zwar sieht man A bzw. B unter einem Tiefenwinkel von 68.3° bzw. 28.7° . Die Verbindungsstrecke von A nach B erscheint unter einem Sehwinkel von 62.8° . Wie hoch liegt der Beobachtungsort über der Ebene und wie groß ist der Luftlinienabstand zwischen A bzw. B und dem Beobachtungsort?
11. In einer Landkarte findet man drei Punkte A , B , C auf einer gemeinsamen Geraden, wobei die Seehöhen von B bzw. C 1827 bzw. 603 Meter betragen. Um die in der Karte unleserliche Seehöhe von A zu eruieren, wird eine Messung in natura durchgeführt. Von den auf Bergspitzen liegenden Punkten A und B kann der zwischen ihnen im Tal liegende Punkt C anvisiert werden. Und zwar sieht man C von A bzw. B aus unter einem Tiefenwinkel von 19.32° bzw. 31.67° . Außerdem erscheint der tiefer liegende Punkt A von B aus unter einem Tiefenwinkel von 15.88° . Berechnen Sie die Seehöhe von A .

[2. UE-Einheit] Reelle Funktionen

12. Zeichnen Sie die Graphen der beiden linearen Funktionen

$$x \mapsto 3x - 4 \quad \text{und} \quad x \mapsto 5 - 4x$$

und berechnen Sie die Koordinaten des Schnittpunkts der beiden Graphen.

13. Gegeben sind die beiden Kurven

$$y = x^3 + 3x^2 + 3x - 6 \quad \text{und} \quad y = x^3 + 4x^2 + 4x - 8 .$$

Gesucht ist die Gleichung derjenigen Geraden, die die beiden Schnittpunkte der gegebenen Kurven miteinander verbindet.

14. Wo schneidet der Graph der Funktion $f(x) = x^4 - 12x^2 + 36$ die Parabel $y = x^2$?

15. Zeigen Sie, daß die Kurve $y = (x^2 + 2x + 3) \cdot (x^2 + 2x - 3) \cdot (x^2 - 2x + 1)$ in genau drei Punkten die x -Achse schneidet und berechnen Sie die x -Koordinaten dieser drei Punkte.

16. Zeigen Sie, daß die Kurve $y = ((3x - 2)^4 + (4x - 3)^6)^3$ nirgends die x -Achse schneidet.

• Skizzieren Sie die Parabel $y = f(x)$ durch *Translation* der Grundparabel $y = x^2$ für:

17.) $y = (x - 1)^2 + 3$ 18.) $y = 2 + (x + 3)^2$ 19.) $y = 3 - (x - 5)^2$

20. Bestimmen Sie die kleinste Zahl a dergestalt, daß die Funktion $f(x) = 5 + 3(x + 2)^2$ auf dem Intervall $[a, \infty[$ streng monoton wachsend ist.

21. Ermitteln Sie die Umkehrfunktion von $f : [a, \infty[\rightarrow \mathbb{R}$ in der vorigen Aufgabe.

22. Die Flugbahn eines vom Punkt $(0, 12)$ abgefeuerten Geschosses ist durch die Parabel $y = 12 + 2.7x - 0.03x^2$ modelliert. Der Landepunkt des Geschosses liegt auf der x -Achse. Berechnen Sie die Flugweite und die Steighöhe des Geschosses. (*Skizze!*)

23. Skizzieren Sie ausgehend von der Grundkurve $y = \ln x$ den Graphen der durch $y = 2 + \ln(x + 3)$ gegebenen Funktion f und den Graphen der Umkehrfunktion von f .

24. Zeichnen Sie den Graphen der *Holzwachstums-Modellfunktion*

$$t \mapsto \ell(t) = \ell_\infty \exp(-\gamma e^{-bt})$$

für die Grenzhöhe $\ell_\infty = 48$ Meter und die Parameter $\gamma = 2.5$ und $b = 0.04$ auf dem Zeitintervall $30 \leq t \leq 150$. (Das Argument t der Funktion ist das in *Jahren* gemessene *Alter*. Der Funktionswert $\ell(t)$ ist die Baumhöhe zum Zeitpunkt t . Es genügt, die auszuwertenden Zeitpunkte alle zehn Jahre zu wählen.)

25. Fichtenbestand bei *Bruck/Mur* (Ertragsklasse 10)

| | | | | | | |
|-------------------------------|------|------|------|------|------|------|
| Alter t in Jahren | 30 | 40 | 50 | 60 | 70 | 80 |
| Max. Höhe $\ell(t)$ in Metern | 14.1 | 18.6 | 22.4 | 25.5 | 28.0 | 30.1 |

| | | | | | | |
|------|------|------|------|------|------|------|
| 90 | 100 | 110 | 120 | 130 | 140 | 150 |
| 31.7 | 33.0 | 34.0 | 34.8 | 35.4 | 35.9 | 36.3 |

(Nach: J. Marschall, Hilfstafeln für die Forsteinrichtung, S. 58)

Bestimmen Sie die Konstanten ℓ_∞ , γ und b in der Modellfunktion $t \mapsto \ell(t)$ aus den Tabellenwerten $\ell(30)$, $\ell(90)$, $\ell(150)$. Vergleichen Sie weiters die Werte der Modellfunktion mit den übrigen Tabellenwerten.

[3. UE-Einheit] Vektorrechnung

26. Auf der Geraden g durch die Punkte $A(-1, 0, -5)$ und $B(2, 4, 7)$ ist zunächst einmal derjenige Punkt C zu ermitteln, den man durch Abtragen einer Strecke der Länge 52 von A aus in Richtung nach B bekommt. Ermitteln Sie dann die Gleichung der Ebene durch den Punkt C , die normal auf die Gerade g steht.

• Gegeben ist das Dreieck durch die Punkte $A(-1, 3, 0)$, $B(12, 3, -1)$, $C(3, 14, -2)$. Berechnen Sie **27.)** den *Umfang* und **28.)** den *Flächeninhalt*.

• Bestimmen Sie **29.)** den *Schnittpunkt* und **30.)** den *Schnittwinkel* der Diagonalen AC und BD des Vierecks durch die Punkte $A(-3, -4)$, $B(5, -2)$, $C(6, 7)$, $D(-8, 4)$.

31. Von welchen Punkten P der Geraden $g : \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \lambda \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ -1 \end{pmatrix}$ aus sieht man die Punkte $A(1, -5, 8)$ und $B(6, 3, -2)$ unter einem rechten Winkel? (*Um Mißverständnisse zu vermeiden: ABP soll ein Dreieck mit einem rechten Winkel in P sein!*)

32. Ermitteln Sie die Gleichung der Geraden g durch die Punkte $A(-3, 7)$ und $B(12, 2)$, sowie die Gleichung der Geraden h , die durch den Mittelpunkt der Strecke AB geht und mit der Geraden g einen rechten Winkel einschließt.

33. Es sei g die Gerade, die den Punkt $(-1, 2, -4)$ mit dem Ursprung $(0, 0, 0)$ verbindet, und h die Gerade, die den Punkt $(2, -3, 5)$ mit dem Ursprung $(0, 0, 0)$ verbindet. Berechnen Sie den *Winkel* zwischen den (einander schneidenden) Geraden g und h .

34. Gegeben sind zwei Ebenen ε_1 und ε_2 durch die Gleichungen

$$2x + 4y - 5z = 8 \quad \text{und} \quad 3x - 5y + 7z = 9.$$

Gesucht ist die *Gleichung* derjenigen Ebene, die durch den Punkt $(0, 0, 1)$ geht und normal auf die Schnittgerade der Ebenen ε_1 und ε_2 steht.

35. Eine Ebene ist durch die drei Punkte $A(-1, 1, 0)$ und $B(1, -2, 0)$ und $C(8, 6, 1)$ festgelegt. Ferner ist eine Gerade durch die beiden Punkte $P(-7, -5, 0)$ und $Q(4, 6, 12)$ festgelegt. Berechnen Sie die Koordinaten des *Schnittpunktes* von Gerade und Ebene.

36. Von einem gleichschenkeligen Dreieck ABC , wobei die Seiten AC und BC gleich lang sind, kennt man die Eckpunkte $A(-5, 1, 2)$ und $B(7, 0, -4)$. Der Punkt C liegt auf der Geraden, die die Punkte $P(0, 0, -5)$ und $Q(-2, 3, 0)$ verbindet. Berechnen Sie Umfang und Flächeninhalt des Dreiecks.

37. Stellen Sie fest, ob die vier Punkte $A(0, -1, 2)$, $B(6, -2, 1)$, $C(7, 0, 6)$, $D(-7, 3, 5)$ in einer *gemeinsamen* Ebene liegen.

38. Beweisen Sie, daß der Mittelpunkt M der Strecke mit den Endpunkten $A(u, v, w)$ und $B(r, s, t)$ durch $M\left(\frac{u+r}{2}, \frac{v+s}{2}, \frac{w+t}{2}\right)$ gegeben ist.

39. Man bestimme die Zahlen a, b so, daß die beiden Vektoren

$\begin{pmatrix} 1 \\ a \\ 2 \end{pmatrix}$ und $\begin{pmatrix} b \\ 3 \\ 4 \end{pmatrix}$ kollinear sind.

[4. UE-Einheit] Elementare Differentialrechnung

- Ermitteln Sie die *Ableitung* $f'(x)$ der durch $f(x)$ gegebenen reellen Funktion:

40. $f(x) = x^8 - x^7 + x^6 - x^5 + x^3 - x^2 + x - 1$

41. $f(x) = (e^{3x} - x^5) \cdot (e^{-x^2} - 3x^2)$

42. $f(x) = \ln(7 + 4x^3 - \sin(2x))$

43. $f(x) = (e^{-2x} + e^x - e^{-x}) / (x^2 + x + x^{-1})$

44. $f(x) = \frac{1}{4} \cdot \arctan(3x^4 - \ln(4 + x^2) + \sin(6 - 7x))$

45. $f(x) = (3 + x^4)^{2x-3}$

46. Bestimmen Sie den Anstieg der Kurve $y = 4x^3 - 7x^2 + 5x - 7$ an den Stellen $x_1 = -2$ und $x_2 = 3$.

47. Bestimmen Sie den Anstieg der Kurve $y = \arctan(3x^4 - 2 \exp(x^2 - 1))$ im Kurvenpunkt $(-1, \cdot)$.

48. Bestimmen Sie die Gleichung der Tangente an die Kurve $y = 2 \cdot \exp(3x + 5 \sin x)$ im Kurvenpunkt $(0, 2)$.

49. Stellen Sie die Gleichungen der Tangenten in den beiden Schnittpunkten der Parabel $y = 9 - x^2$ mit der x -Achse auf.

- Stellen Sie die Gleichungen der Tangenten in den beiden Schnittpunkten des Kreises

$$(x - 1)^2 + (y + 4)^2 = 25$$

50.) mit der x -Achse, 51.) mit der y -Achse auf.

52. Ermitteln Sie alle Punkte (x_0, y_0) auf der Kurve

$$y = 4x^3 - 8x^2 + 4x - 7,$$

wo die Tangente an die Kurve parallel zur x -Achse ist.

53. Ermitteln Sie alle Punkte (x_0, y_0) auf der Kurve

$$y = \frac{1}{3}x^3 - 5x^2 + 28x - 31,$$

wo die Tangente an die Kurve parallel zur Geraden durch $(1, 2)$ und $(5, 14)$ ist.

54. Ermitteln Sie denjenigen Punkt (x_0, y_0) auf der Logarithmuskurve $y = \ln x$, wo die Tangente an die Kurve durch den Ursprung des Koordinatensystems geht.

55. Welcher Punkt der Parabel $y = x^2$ hat den *kleinsten Abstand* von der Geraden $y = 2x - 5$? (*HINWEIS: Nicht als "Extremwertaufgabe" behandeln!*)

56. Berechnen Sie den Winkel zwischen den jeweiligen Tangenten im Schnittpunkt der Hyperbel $xy = 1$ und der Parabel $y^2 = x$.

57. Berechnen Sie den Winkel zwischen den jeweiligen Tangenten in den beiden Schnittpunkten der Grundparabel $y^2 = x$ und der Einheitskreislinie $x^2 + y^2 = 1$.

58. Man untersuche, ob die Funktion $f_1 : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, die durch $x \mapsto \frac{1}{4}x^2 + \frac{3}{4}$ für $x \leq 1$ und durch $x \mapsto \sqrt{x}$ für $x > 1$ gegeben ist, bzw. die Funktion $f_2 : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, die durch $x \mapsto e^{2x} - 1$ für $x \leq 0$ und durch $x \mapsto 3x$ für $x > 0$ gegeben ist,

a) *stetig*, b) *differenzierbar* ist, und begründe den Sachverhalt ausführlich.

[5. UE-Einheit] Elementare Integralrechnung

- Lösen Sie die folgenden unbestimmten Integrale und überprüfen Sie Ihr Ergebnis durch Differentiation.

$$\mathbf{59.)} \quad \int (x^2 - 5x) \cdot \ln x \, dx \quad \mathbf{60.)} \quad \int (3x - 2) \cdot \cos x \, dx$$

- Ohne umständliche (aus der Schule bekannte) Substitution löse man durch *gezieltes Erraten* die folgenden unbestimmten Integrale.

$$\mathbf{61.)} \quad \int x \cdot \sin(x^2 + \pi) \, dx \quad \mathbf{62.)} \quad \int e^{1 - \sin x} \cdot \cos x \, dx \quad \mathbf{63.)} \quad \int x^3 e^{3 - x^4} \, dx$$

- Es sei $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ stetig und $F : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ eine Stammfunktion von f . Im Lichte der vorigen Aufgabe stelle man praktische *Formeln* auf zur Berechnung von:

$$\mathbf{64.)} \quad \int f(ax + b) \, dx \quad \mathbf{65.)} \quad \int x \cdot f(ax^2 + b) \, dx \quad \mathbf{66.)} \quad \int x^2 \cdot f(ax^3 + b) \, dx$$

$$\mathbf{67.)} \quad \int (\cos x) \cdot f(a + b \sin x) \, dx \quad \mathbf{68.)} \quad \int e^{-x} \cdot f(a + b e^{-x}) \, dx$$

- Berechnen Sie (auf fünf Ziffern nach dem Dezimalpunkt genau) den Flächeninhalt der Bereiche:

$$\mathbf{69.)} \quad 0 \leq y \leq x^{3/2} - x^{2/3} \quad (4 \leq x \leq 7)$$

$$\mathbf{70.)} \quad 1 \leq y \leq \sqrt{16 - 3x} \quad (3 \leq x \leq 5)$$

$$\mathbf{71.)} \quad -3 \leq y \leq \frac{1}{2} - \sin(x/2) \quad (1 \leq x \leq 9)$$

$$\mathbf{72.)} \quad |y| \leq 1 + \cos\left(\frac{\pi x}{2}\right) \quad (-5 \leq x \leq 7)$$

$$\mathbf{73.)} \quad |y| \leq e^{-\frac{x}{2}}(x + 8) \quad (-8 \leq x \leq 0)$$

$$\mathbf{74.)} \quad 2^x \leq y \leq x^2 \quad (x > 0)$$

- 75.** Wie groß ist die Fläche *zwischen* der Kurve $y = (x + 3)(x - 2)(x - 5)$ und der x -Achse?

- 76.** Es sei $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ differenzierbar und überall $f(x) > 0$ und die Ableitung f' von f sei auf ganz \mathbb{R} stetig. Stellen Sie praktische *Formeln* auf zur Berechnung von

$$\int \frac{f'(x)}{f(x)} \, dx \quad \text{und} \quad \int \frac{f'(x)}{f(x)^2} \, dx \quad \text{und} \quad \int \frac{f'(x)}{1 + f(x)^2} \, dx .$$

- 77.** Eine stetige Funktion $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ nennt man *gerade*, falls $f(-x) = f(x)$ für alle $x \geq 0$ gilt. Man nennt f *ungerade*, falls $f(-x) = -f(x)$ für alle $x \geq 0$ gilt. Erklären Sie, was dies geometrisch bedeutet. Begründen Sie ferner, daß für $a > 0$ (unter der vereinfachenden, aber überflüssigen Annahme $f(x) \geq 0$ für $0 \leq x \leq a$) stets $\int_{-a}^a f(x) \, dx = 0$ gilt, falls f ungerade ist, und stets $\int_{-a}^a f(x) \, dx = 2 \int_0^a f(x) \, dx$ gilt, falls f gerade ist.

- 78.** Ermitteln Sie den Wert des bestimmten Integrals $\int_{-\pi}^{\pi} (\sin|x| + \sin(x^3)) \, dx$.

[6. UE-Einheit] Minima und Maxima

Die Bestimmung der Extrema ist in *effizienter* Weise gemäß der in Kapitel VIII des Skriptums präsentierten Methode durchzuführen. Die in der Schule gepflegte *umständliche* Vorgangsweise (Verwendung der *zweiten Ableitung*) ist für eine Tafelmeldung *unzulässig*. (Beim Test steht es jedem frei, wertvolle Arbeitszeit zu verschwenden und einfach ausführbare Aufgaben unnötig umständlich zu rechnen.)

In den folgenden sieben Aufgaben ist jeweils das Minimum und das Maximum der Funktion $x \mapsto f(x)$ auf dem Intervall $a \leq x \leq b$ zu ermitteln.

79. $f(x) = 2x^3 - 15x^2 + 36x - 27$; $1 \leq x \leq 8$

80. $f(x) = x^2(1 - x^2)$; $0 \leq x \leq 1$

81. $f(x) = 7 - e^{x^2}(3x + 5)$; $-1 \leq x \leq 1$

82. $f(x) = x^3 + 4x + \sin(4x)$; $-3 \leq x \leq 2$

83. $f(x) = \frac{x^3 - 5x}{x^2 + 3}$; $-\sqrt{5} \leq x \leq \sqrt{5}$

84. $f(x) = x + \cos x$; $0 \leq x \leq 6\pi$

85. $f(x) = 5 - x^3 - e^{2x}$; $-1 \leq x \leq 1$

86. In einem Obstlager eines Großhändlers liegen 12 000 kg Obst. Die Lagerkosten betragen EUR 100,- pro Tag und es werden (im Zeitraum einer Woche) täglich durchschnittlich 35 kg Obst ungenießbar. Der Preis pro kg Obst beträgt am Anfang EUR 3,80 und wird täglich um 2 Cent höher. Nach wie vielen Tagen soll der Großhändler sein Lager verkaufen, wenn der Erlös möglichst groß werden soll?

87. Aus einem Baumstamm wird ein Balken so herausgesägt, daß der dabei entstehende Abfall *möglichst gering* ist. Wie muß der Querschnitt des Balkens dann genau aussehen?

88. Aus einem Baumstamm wird ein Balken mit *maximaler Tragfähigkeit* herausgesägt. Wie muß der Querschnitt des Balkens dann genau aussehen? (Aus der Statik weiß man, daß die Tragfähigkeit eines Balkens proportional zum Produkt seiner Breite und dem Quadrat seiner Dicke ist.)

89. Ein Fenster von der Form eines Rechtecks mit aufgesetztem Halbkreis hat den Umfang u . Wie ist der Radius des Halbkreises zu wählen, damit möglichst viel Licht durch das Fenster einfallen kann?

90. Welcher Punkt der Parabel $y = x^2$ hat den kleinsten Abstand zum Punkt $(1, 0)$?

91. Welche Punkte der gleichseitigen Hyperbel $x^2 - y^2 = 1$ haben den kleinsten Abstand zum Punkt $(0, 1)$?

92. Ein Massepunkt M_1 bewegt sich mit konstanter Geschwindigkeit geradlinig von $A(-10, 0, 0)$ nach $B(10, 0, 5)$ und genauso bewegt sich ein Massepunkt M_2 von $C(0, -8, 0)$ nach $D(0, 12, 6)$. Dabei sind M_1 bzw. M_2 gleichzeitig in A bzw. C und gleichzeitig in B bzw. D . Bestimmen Sie die kleinstmögliche Distanz der beiden Massenpunkte während des gesamten Bewegungsablaufes.

93. Man rechne die vorige Aufgabe *modifiziert* dergestalt, daß zum Zeitpunkt $t = 0$ der Massepunkt M_1 bzw. M_2 in A bzw. C liegt und die Geschwindigkeit von M_2 genau doppelt so groß wie die von M_1 ist.

94. Durch $f(x) = 3x^5 - 145x^3 + 1500x - 101$ sei eine reellwertige Funktion f mit Definitionsbereich $[0, \infty[$ festgelegt. Stellen Sie fest, ob das Maximum bzw. Minimum von f existiert, und ermitteln Sie es gegebenenfalls.

[7. UE-Einheit] Rauminhaltsberechnungen

95. Ein Körper \mathcal{K} hat als Grundfläche einen Halbkreis mit Radius $r = 5$. Jede Ebene, die \mathcal{K} trifft und auf den begrenzenden Durchmesser des Basishalbkreises senkrecht steht, schneidet aus \mathcal{K} ein gleichseitiges Dreieck heraus. Berechnen Sie das Volumen des Körpers.

96. Ein Körper \mathcal{K} hat als Grundfläche eine Ellipse mit längstem Durchmesser 15 und kürzestem Durchmesser 9. Jede Ebene, die \mathcal{K} trifft und auf die Hauptachse der Ellipse senkrecht steht, schneidet aus \mathcal{K} ein Quadrat heraus. Berechnen Sie das Volumen von \mathcal{K} .

97. Die Grundfläche eines Körpers \mathcal{K} ist ein Trapez durch die Punkte $(0, 0, 0)$, $(15, 0, 0)$, $(15, 9, 0)$, $(0, 12, 0)$. Jede Ebene, die \mathcal{K} trifft und parallel zur y, z -Ebene ist, schneidet aus \mathcal{K} einen Halbkreis heraus. Berechnen Sie das Volumen von \mathcal{K} .

98. Die Grundfläche eines Körpers \mathcal{K} ist dasselbe Trapez wie in der vorigen Aufgabe. Jede Ebene, die \mathcal{K} trifft und parallel zur y, z -Ebene ist, schneidet aus \mathcal{K} ein Parabelsegment heraus dergestalt, daß die beiden "Eck"-Punkte des Segments in der x, y -Ebene zusammen mit dem Scheitelpunkt der Parabel ein rechtwinkeliges Dreieck bilden. Berechnen Sie das Volumen von \mathcal{K} .

99. Berechnen Sie das Volumen der folgenden Rotationskörper:

a) $\{ (x, y, z) \mid 0 \leq x \leq 1 \ \& \ y^2 + z^2 \leq (x^4 - x^5)^2 \}$

b) $\{ (x, y, z) \mid 0 \leq y \leq 1 \ \& \ x^2 + z^2 \leq (y^4 - y^5)^2 \}$

c) $\{ (x, y, z) \mid 0 \leq z \leq 1 \ \& \ x^2 + y^2 \leq (z^4 - z^5)^2 \}$

100. Die Fläche $0 \leq x \leq 1$, $0 \leq y \leq e^{-x}$ rotiert um die x -Achse als Drehachse. (*Skizze!*) Berechnen Sie das Volumen des so entstehenden Rotationskörpers.

101. Die Fläche $0 \leq x \leq 1$, $0 \leq y \leq e^{-x}$ rotiert um die y -Achse als Drehachse. (*Skizze!*) Berechnen Sie das Volumen des so entstehenden Rotationskörpers.

102. Die durch $12 - 3x^2 \leq y \leq 16 - 4x^2$ festgelegte Fläche in der xy -Ebene rotiert um die x -Achse. (*Skizze!*) Berechnen Sie das Volumen des so entstehenden Rotationskörpers.

103. Zeigen Sie, daß das Volumen eines Tetraeders mit den Eckpunkten $(0, 0, 0)$, $(a, 0, 0)$, $(0, b, 0)$ und $(0, 0, c)$ für beliebige positive $a, b, c \in \mathbb{R}$ exakt gleich $abc/6$ beträgt.

104. Berechnen Sie das Volumen des durch

$$1 \leq x \leq 3, \quad -1 \leq y \leq 0, \quad 0 \leq z \leq x^3 y^2 + y^4$$

gegebenen Normalkörpers.

105. Berechnen Sie das Volumen des durch

$$0 \leq x \leq 1, \quad x^2 \leq y \leq x, \quad -x^3 y \leq z \leq xy^2$$

gegebenen Normalkörpers.

106. Berechnen Sie das Volumen des durch

$$4x^2 - 4 \leq y \leq 5 - 5x^2 \quad \text{und} \quad x^2 + 2y \leq z \leq x^3 + 3y + 6$$

festgelegten Normalkörpers.

107. Die Achsen zweier Drehzylinder von gleichem Radius r schneiden einander rechtwinkelig. Berechnen Sie das Volumen des *Schnittkörpers* \mathcal{K} der beiden Drehzylinder.

HINWEIS: Man modelliere die beiden Zylinder so, daß die x -Achse die Drehachse des einen Zylinders und die y -Achse die Drehachse des anderen Zylinders ist. Dann schneidet jede zur x, y -Ebene parallele Ebene, die \mathcal{K} trifft, aus dem Körper \mathcal{K} ein *Quadrat* heraus, dessen Mittelpunkt in der z -Achse liegt und dessen Seiten parallel zur x - bzw. y -Achse sind.

[8. UE-Einheit] Gebietsintegrale und Raumintegrale

- Berechnen Sie die folgenden vier Gebietsintegrale:

108. $\int_{-1}^5 \int_1^4 (x^3 y^2 - xy^3)^2 dy dx$

109. $\int_0^1 \int_0^2 ye^{xy/3} dy dx$

110. $\iint_{\mathcal{D}} \cos(2x - 3y) d(x, y)$, \mathcal{D} = Dreiecksfläche mit den Eckpunkten $(1, 0)$, $(9, 0)$, $(1, 7)$.

111. $\iint_{\mathcal{D}} (8 - 4\sqrt{x^2 + y^2})^3 d(x, y)$, \mathcal{D} = Kreisscheibe mit Mittelpunkt $(0, 0)$ und Radius 4.

112. Ermitteln Sie die Masse des durch $0 \leq x \leq 8$, $0 \leq y \leq 5$, $0 \leq z \leq 6$ festgelegten Quaders, wenn die Dichte im Quaderpunkt (x, y, z) durch xy^2z^3 gegeben ist.

113. Ermitteln Sie die Masse des durch

$$0 \leq x \leq 1, \quad 0 \leq y \leq x^2, \quad 0 \leq z \leq xy$$

festgelegten Körpers, wenn die Dichte im Punkt (x, y, z) durch xyz gegeben ist.

114. Berechnen Sie die Koordinaten des Mittelpunkts des durch

$$0 \leq x \leq 1, \quad 0 \leq y \leq x^2, \quad 0 \leq z \leq xy$$

festgelegten Normalkörpers.

115. Im Punkt (x, y, z) des durch $0 \leq x \leq 2$, $0 \leq y \leq 3$, $0 \leq z \leq 5$ festgelegten Quaders beträgt die Dichte $x^5y^3z^2$. Ermitteln Sie die drei Koordinaten des Schwerpunkts.

- Berechnen Sie die Masse der Kugel $x^2 + y^2 + z^2 \leq r^2$ mit der Dichte $\rho(x, y, z)$ im Punkt (x, y, z) für:

116.) $\rho(x, y, z) = (1 - \sqrt{x^2 + y^2 + z^2})^2$

117.) $\rho(x, y, z) = \exp((x^2 + y^2 + z^2)^{3/2})$

118.) $\rho(x, y, z) = 4r^2 + 7x^2 - 3y^2 + 5z^2$

HINWEIS: Aus Symmetriegründen gilt für die durch $x^2 + y^2 + z^2 \leq r^2$ gegebene Kugel \mathcal{K}

$$\iiint_{\mathcal{K}} x^2 d(x, y, z) = \iiint_{\mathcal{K}} y^2 d(x, y, z) = \iiint_{\mathcal{K}} z^2 d(x, y, z).$$

Folglich gilt $\iiint_{\mathcal{K}} x^2 d(x, y, z) = \iiint_{\mathcal{K}} y^2 d(x, y, z) = \iiint_{\mathcal{K}} z^2 d(x, y, z) = \frac{1}{3} \cdot \iiint_{\mathcal{K}} (x^2 + y^2 + z^2) d(x, y, z)$.

- Bestimmen Sie den Mittelpunkt des Normalbereichs \mathcal{D} für:

119.) $\mathcal{D} = \{ (x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid x^2 \leq y \leq 1 \}$

120.) $\mathcal{D} = \{ (x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid x^2 \leq y \leq 2x \}$

[9. UE-Einheit] Analytische Geometrie im ebenen Gelände

121. Bei den Geländepunkten $A(-300, 800, 20)$, $B(700, 200, 25)$ und $C(500, 900, 14)$ werden vertikale Bohrungen durchgeführt. Dabei stößt man auf eine ebene geologische Schicht in 15.3 Metern bei A , in 18.7 Metern bei B und in 9.2 Metern bei C . Bei welcher Bohrtiefe stößt man auf diese geologische Schicht beim Geländepunkt $D(400, 500, 16)$?

122. Die in einer horizontalen Standebene liegenden Punkte A_0, B_0, C_0 sind die Eckpunkte eines rechtwinkligen Dreiecks, die Seite A_0B_0 beträgt exakt 10 Meter, die Seite A_0C_0 beträgt exakt 8 Meter, die Seite B_0C_0 beträgt exakt 6 Meter. In den drei Punkten werden vertikale Masten errichtet, sodaß A_0, B_0, C_0 die Fußpunkte der drei Masten darstellen. Die Spitzen der drei Masten werden entsprechend mit A, B, C bezeichnet und bilden die Eckpunkte einer dreieckigen, ebenen Dachfläche \mathcal{D} . Der Mast $\overline{A_0A}$ habe eine Länge von 5 Metern, die Länge des Mastes $\overline{B_0B}$ betrage 7 Meter und die des Mastes $\overline{C_0C}$ betrage 8 Meter. Berechnen Sie den *Umfang* und den *Flächeninhalt* der Dachfläche \mathcal{D} , sowie den *Horizontalneigungswinkel* der Dachebene.

123. Ein gerader Weg in einem Gelände, der durch zwei Punkte A und B festgelegt ist, deren Grundrisse durch $A'(-600, 100)$ und $B'(700, 200)$ gegeben sind, soll *graduirt* werden. Die Höhenkote von A beträgt 90 Meter, die von B 130 Meter. Ermitteln sie (im Grundriß) diejenigen Punkte des Weges, deren Höhenkoten 100, 110, 120 Meter betragen.

In den folgenden drei Aufgaben ist die Geländeebene γ durch die Gleichung $x - 2y + 5z = 0$ gegeben.

124. Bestimmen Sie den Anstieg der Fallgeraden der Geländeebene γ und den Neigungswinkel der Geländeebene γ .

125. Bestimmen Sie die Steigung einer geraden Straße des Geländes γ , deren Achse in der Profilebene $x - 3y = 7$ liegt.

126. Bestimmen Sie die Richtung der geraden Straßen des Geländes γ , die 12% Steigung haben.

In den folgenden vier Aufgaben ist die Geländeebene γ durch die Punkte $A(-40, -90, 0)$, $B(80, 20, -5)$ und $C(70, -30, 10)$ festgelegt.

127. Bestimmen Sie die Höhengerade von γ durch C durch Angabe einer Profilebene.

128. Bestimmen Sie Anstieg und Neigungswinkel von γ .

129. Bestimmen Sie die Steigung einer geraden Straße des Geländes γ , deren Achse in der Profilebene durch die Grundrißpunkte $(10, 0)$ und $(0, 15)$ liegt.

130. Ermitteln Sie die Achsen der geraden Straßen des Geländes γ , die 7% Steigung haben jeweils durch Bestimmung zweier Achsenpunkte.

131. Die Gerade $g : \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \lambda \begin{pmatrix} 5 \\ 12 \\ 1 \end{pmatrix}$ modelliere einen Straßenrand, der mit einer (ebenen) Mauer abzuböschten ist, die den realistischen Anstieg 3 : 1 aufweist. Bestimmen Sie also diejenigen Ebenen ϵ , die die Gerade g tragen und den Anstieg $k_\epsilon = 3$ aufweisen.

[10. UE-Einheit] Differentialgleichungen

- Lösen Sie die folgenden fünf Anfangswertprobleme mit *Trennen der Variablen*:

132. $y' = x^2/y^3$; $y(0) = 2$

133. $y' = x^2 \cdot y^3$; $y(0) = 3$

134. $y' = \sqrt{y}$; $y(8) = 9$

135. $y' = -\sqrt{y}$; $y(8) = 9$

136. $y' = y^2 \ln x$; $y(1) = 2$

- Lösen Sie die folgenden drei *linearen* Anfangswertprobleme:

137. $y' = \frac{y}{x} + x^3 - x^2 + x - 1$; $y(1) = 2$

138. $y' = 3x^2y + e^{x^3-5x}$; $y(0) = 1$

139. $xy' - y = x^3 + x^2 + 5$; $y(1) = 2$

140. Lösen Sie das Anfangswertproblem $y' = yx \sin(x^2)$, $y(0) = 1$ auf zwei Arten, nämlich einerseits mit *Trennen der Variablen*, andererseits mit der Lösungsmethode für *lineare Differentialgleichungen*. [2 Tafelmeldungen]

141. **Frühstadium pflanzlichen Wachstums.** $h(t)$ sei die Höhe einer Pflanze zur Zeit t . Bei vielen Pflanzen ist im *Frühstadium* ihres Wachstums die zeitliche Änderungsrate von $h(t)$ *direkt* proportional zu $h(t)$ und *umgekehrt* proportional zu t^3 . Bestimmen Sie $h(t)$, wenn die Maßeinheiten so gewählt sind, daß $h(1) = 1$ ist.

142. **Verfaulende Vegetation.** In tropischen Wäldern verfault die abgestorbene Vegetation mit einer Rate von 80% pro Jahr. Gleichzeitig sammelt sich aber neuer "Abfall" an, sagen wir 70 Kilogramm pro Quadratmeter und Jahr. Man stelle eine Differentialgleichung für die Menge $A(t)$ des Abfalls auf einem Quadratmeter auf, wobei die Zeit t in Jahren gemessen wird. Man ermittle die Lösung $A(t)$ dieser Differentialgleichung unter der Anfangsbedingung $A(0) = 57.5 \text{ kg/m}^2$. Ferner zeige man, daß die Abfallmenge $A(t)$ mit der Zeit wächst, aber nie mehr als 87.5 Kilogramm pro Quadratmeter beträgt und sogar diesen Wert bereits nach wenigen Jahren nahezu erreicht.

143. **Mottenkugeln.** Das Volumen einer Mottenkugel vermindert sich mit einer zeitlichen Rate, die proportional zu der jeweils noch vorhandenen Oberfläche F ist: $dV/dt = -\lambda F$ ($\lambda > 0$ konstant). Sei $\rho > 0$ der Radius einer gerade ausgelegten Mottenkugel und $r(t)$ ihr Radius nach Ablauf der Zeit t . **a)** Wie groß ist $r(t)$? **b)** Angenommen, die Mottenkugel habe nach 60 Tagen ihr halbes Gewicht verloren. Nach wieviel Tagen ist ihr Radius auf ein Zehntel seiner Anfangsgröße ρ geschrumpft?

144. **Vermehrung von Fruchtfliegen.** Experimentell wurde festgestellt, daß die Änderungsrate $P'(t)$ einer Fruchtfliegenpopulation $P(t)$ durch die Differentialgleichung $P' = \left(\frac{5}{P} + \frac{5}{1035-P}\right)^{-1}$ beschrieben wird, wobei die Zeit t in *Tagen* gemessen wird. Am Anfang $t = 0$ seien 10 Fruchtfliegen vorhanden. Wie viele Fliegen sind nach 12 bzw. 24 Tagen da? Zeigen Sie ferner, daß die Population ständig wächst, aber niemals mehr als 1035 Fliegen umfaßt. Bei welcher Populationsgröße P und am wievielten Tag t erreicht die Wachstumsrate $P'(t)$ ihr Maximum?

[11. UE-Einheit] Neujahrswiederholungsaufgaben

- Lösen Sie die folgenden sechs Anfangswertprobleme:

145. $y' = \frac{3+x}{2+y}$; $y(2) = -3$

146. $y' = \frac{3+y}{2+x}$; $y(2) = 3$

147. $xy' + y = \sqrt{2x+3}$; $y(3) = 4$

148. $y' = \frac{3x^2-2}{x^3}y + 1$; $y(1) = \frac{1+e}{2}$

149. $y' = x^{5/7}y^{-3/2}$; $y(5) = 7$

150. $y' = y^3 e^{-5x+7}$; $y(\frac{7}{5}) = \frac{1}{3}$

151. Ein ebenes Gelände sei durch die Punkte $A(0, 20, 2)$, $B(40, 0, 4)$, $C(0, 0, 0)$ festgelegt. Ermitteln Sie die beiden Achsen durch C von geraden Straßen der Geländeebene, die 5% Steigung haben, jeweils durch Bestimmung eines Achsenpunktes $\neq C$.

152. Berechnen Sie das Volumen des durch

$$4 \leq x \leq 9, \quad 2 \leq y \leq \sqrt{x}, \quad 0 \leq z \leq x^4 + x^3y^2$$

festgelegten Normalkörpers.

153. Ein Tetraeder ist durch die Eckpunkte $(0, 0, 0)$, $(0, 2, 0)$, $(3, 0, 0)$, $(0, 0, 5)$ festgelegt. Berechnen Sie die Masse des Tetraeders, wenn die Dichte im Punkt (x, y, z) durch x^2yz gegeben ist.

- Berechnen Sie die folgenden beiden Gebietsintegrale:

154. $\iint_{\mathcal{D}} xy \sin(x+y) d(x,y)$, $\mathcal{D} =$ Dreiecksfläche mit den Eckpunkten $(0,0)$, $(1,0)$, $(0,1)$.

155. $\iint_{\mathcal{D}} xe^{-y} d(x,y)$, $\mathcal{D} =$ Parabelsegment $x^2 \leq y \leq x+6$

156. Bestimmen Sie den Mittelpunkt des Normalbereichs

$$\{ (x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid x^2 \leq y \leq 1-x^4 \} .$$

157. Berechnen Sie die Masse der Kugel $x^2 + y^2 + z^2 \leq r^2$ mit der Dichte $\rho(x,y,z) = 1 + \cos((x^2 + y^2 + z^2)^{3/2})$ im Punkt (x,y,z) .

158. Berechnen Sie die Masse des durch $x^2 + y^2 \leq 4$ und $0 \leq z \leq 3$ gegebenen Zylinders mit der Dichte $\rho(x,y,z) = e^{z/3}$ im Punkt (x,y,z) .

[12. UE-Einheit] Partielle Ableitungen

159. Berechnen Sie die beiden partiellen Ableitungen von $f(x, y) = (3x^5 + 5y^3)^7$ bei $(x, y) = (-2, 1)$.

160. Berechnen Sie die beiden partiellen Ableitungen von

$$f(x, y) = \sqrt{\frac{x^3y^2 + x^2y - x}{x^4 + y^2}}$$

bei $(x, y) = (2, 3)$.

• Berechnen Sie formal die beiden partiellen Ableitungen von

161.) $f(x, y) = x^5 - 3x^4y + 2x^3y^2 - 7x^2y^3 + 4xy^4 - 8y^5$

162.) $f(x, y) = (5x^2y + 7y^2)e^{3x-5y}$

163.) $f(x, y) = x^3y^5 \cdot \cos(\pi - x^2y^3)$

• Der *Flächeninhalt* eines im \mathbb{R}^3 durch $z = f(x, y)$ und $(x, y) \in \mathcal{D}$ festgelegten Flächenstücks (wobei \mathcal{D} ein Normalbereich ist) ist gegeben durch das Gebietsintegral

$$\iint_{\mathcal{D}} \sqrt{1 + \left(\frac{\partial f}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial f}{\partial y}\right)^2} d(x, y).$$

164. Berechnen Sie den Flächeninhalt des durch $z = \sqrt{2xy}$ und $1 \leq x \leq 3$ und $1 \leq y \leq 5$ festgelegten Flächenstücks. [REMEMBER Formel $x^2 + 2xy + y^2 = (x + y)^2$!]

165. Zeigen Sie, daß die Oberfläche einer Kugel mit Radius r exakt gleich $4r^2\pi$ beträgt.

166. Berechnen Sie den Flächeninhalt der durch $x^2 + y^2 + z^2 = 9$ und $x^2 + y^2 \leq 4$ und $z > 0$ festgelegten Kugelkappe.

167. Berechnen Sie den Flächeninhalt des Paraboloids $z = x^2 + y^2$ zwischen den beiden Ebenen $z = 0$ und $z = 4$.

• *Differenzieren unterm Integral.* Es sei $f : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ eine Elementarfunktion und es seien $g : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ und $h : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ differenzierbar. Ist die durch

$$x \mapsto \varphi(x) := \int_{g(x)}^{h(x)} f(x, y) dy$$

definierte Funktion φ differenzierbar, so gilt (unter günstigen Voraussetzungen)

$$\varphi'(x) = \int_{g(x)}^{h(x)} \frac{\partial f}{\partial x}(x, y) dy + h'(x) \cdot f(x, h(x)) - g'(x) \cdot f(x, g(x)).$$

168. Berechnen Sie die Ableitung $\varphi'(x)$ der durch $\varphi(x) = \int_x^{x^2} \sin(xy) dy$ festgelegten Funktion φ für $x \neq 0$ erstens mit der obigen Formel und zweitens ohne dieselbe.

169. Berechnen Sie die Ableitung $\varphi'(x)$ der durch $\varphi(x) = \int_0^x \frac{y}{1+y^2} \sin(x + xy^2) dy$ festgelegten Funktion für $x \neq 0$.

170. Berechnen Sie $\varphi(0)$ und $\varphi'(0)$ für $\varphi(x) = \int_0^{e^x} \cos(x^2y^2) dy$.

[13. UE-Einheit] Extremalprobleme in zwei Variablen

- In den folgenden fünf Aufgaben ist jeweils das Maximum und das Minimum der Funktion f auf dem Normalbereich \mathcal{D} zu ermitteln.

171. $f(x, y) = x^3 - y^3 + 3xy$; $\mathcal{D} = [-3, 2] \times [-2, 4]$

172. $f(x, y) = 2x^2 + y^2 - xy - 7y + 5$; $\mathcal{D} : 0 \leq x \leq y \leq 5$

173. $f(x, y) = (x^2 + 2y^2) \cdot \exp(1 - x^2 - y^2)$; $\mathcal{D} : x^2 + y^2 \leq 1$

174. $f(x, y) = \frac{1}{y} - \frac{1}{x} - 4x + y + 3$; $\mathcal{D} : -2 \leq x \leq -\frac{1}{4}, \frac{1}{2} \leq y \leq 2$

175. $f(x, y) = x^3 y^2 (1 - x - y)$; $\mathcal{D} : x \geq 0, y \geq 0, x + y \leq 1$

176. Man bestimme das Maximum und das Minimum der Funktion

$$f(x, y) = 5x^2 + 3y^2 - 4x^2 y^2 + 6$$

auf der Ellipsenscheibe $3x^2 + 4y^2 \leq 5$.

177. Man bestimme das Maximum und das Minimum der Funktion

$$f(x, y) = x^3 + y^4 + 5$$

auf der Kreislinie $x^2 + y^2 = 6$.

178. Man bestimme das Maximum und das Minimum der Funktion

$$f(x, y) = xy(4 - x^2 - y^2)$$

auf dem Viertelkreissektor $x^2 + y^2 \leq 4, x \geq 0, y \geq 0$.

- Man bestimme das Maximum und das Minimum der linearen Funktion

$$f(x, y) = 12x - 15y + 18$$

auf dem jeweils gegebenem Normalbereich:

179.) Rechtecksbereich $[-6, 8] \times [-3, 9]$

180.) Parabelscheibe $0 \leq x \leq 1 - y^2$

181.) Ellipsenscheibe $4x^2 + 5y^2 \leq 6$

182.) Linsenfläche $e^x \leq y \leq (e-1)x + 1$

183. Man bestimme das Maximum und das Minimum der Funktion

$$f(x, y) = 9 + (y - (16 - 4x^2))(y - (3x^2 - 12))$$

auf dem durch $3x^2 - 12 \leq y \leq 16 - 4x^2$ festgelegten Normalbereich.

184. Berechnen Sie das Maximum und das Minimum der Funktion

$$f(x, y) := y(42 - 6x^2 - 7y^2) + 8$$

auf der durch $6x^2 + 7y^2 \leq 42$ und $y \geq 0$ festgelegten Halb-Ellipsenscheibe.

185. Man bestimme das Maximum und das Minimum der Funktion

$$f(x, y) = \sin x \cdot \sin y \cdot \sin(x+y)$$

auf der Dreiecksfläche mit den Eckpunkten $(0, 0)$, $(\pi, 0)$ und $(0, \pi)$.

[14. UE-Einheit] Lineare Approximation und Geländeaufgaben

186. Es sei \mathcal{F} die durch $z = (7x^5 - 4x^2y^3)e^{3x-2y}$ gegebene Raumfläche und $P(1, -2, \cdot)$ ein Punkt in derselben. Bestimmen Sie die Gleichung der Tangentialebene der Raumfläche \mathcal{F} im Berührungspunkt P .

187. Man bestimme die Richtungsableitungen der Funktion $f(x, y) = \frac{x^3 - x^5 y^7}{1 + x^2 + y^4}$ bei $(a, b) = (-1, 1)$ in Richtung der beiden Vektoren der Länge 1, die parallel zur 1. Mediane $y = x$ sind.

188. Bestimmen Sie denjenigen Winkel α , wo die Richtungsableitung der Funktion f der vorigen Aufgabe im Punkt $(-1, 1)$ in Richtung $\begin{pmatrix} \cos \alpha \\ \sin \alpha \end{pmatrix}$ *maximal* bzw. *minimal* ist.

189. Man bestimme die Richtungsableitung der Funktion

$$f(x, y) = e^{xy-2}(x^6 + x^3y^4)^2$$

im Punkt $Q(-1, 2)$ in Richtung desjenigen Vektors \vec{v} , der durch (positive) Drehung um den Winkel $\alpha = \pi/3$ aus dem Basisvektor $\vec{e}_x = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$ hervorgeht.

190. Der Punkt P habe die z -Koordinate $\frac{\pi}{4}$ und liege auf der durch $\vec{v}(t) = \begin{pmatrix} \cos t \\ \sin t \\ t \end{pmatrix}$ gegebenen Schraublinie. Bestimmen Sie denjenigen Punkt Q in der x, y -Ebene, wo die Verbindungsgerade von P und Q eine Tangente an die Schraublinie ist.

191. Ein Gelände sei durch $z = x^3 - 5xy + y^2$ modelliert. Durch den Geländepunkt $P(-1, \cdot, \cdot)$ verläuft ein Weg, dessen Grundriß durch die ebene Kurve $y = \ln(1 + x^2)$ gegeben ist. Berechnen Sie den *Anstieg* des Weges im Punkt P .

192. Ein ebenes Gelände ist durch die drei Punkte $A(-10, 0, 0)$ und $B(15, 0, 2)$ und $C(0, 20, 4)$ festgelegt. Durch den Geländepunkt $P(5, 12, \cdot)$ verläuft ein elliptischer Weg, dessen Grundriß ein Kreis mit Mittelpunkt $(0, 0)$ ist. Bestimmen Sie den Anstieg des Weges im Punkt P .

193. Ein ebenes Gelände sei durch eine Fallgerade festgelegt, die durch die Punkte $A(5, 10, 15)$ und $B(60, 30, 10)$ geht. Ermitteln Sie jeweils die beiden Grundrißkoordinaten des höchsten und des tiefsten Punktes eines ellipsenförmigen Geländeweges, der durch den Punkt A geht und dessen Grundriß ein Kreis mit Mittelpunkt $(0, 0)$ ist.

194. Im Punkt $Q(3, 2, 4)$ des Geländes $z = y^3 - x^2 + 5$ liegt eine Wasserquelle. Wo genau (d.h. entlang welchen Geländeweges) fließt das Wasser ins Tal?

195. Man ermittle die Gleichung der Tangente im Punkt $(x, y) = (5, -7)$ der implizit gegebenen Kurve $x^5 - x^4y + x^3y^2 - x^2y^3 + xy^4 - y^5 = 51012$ in der x, y -Ebene, indem man die Kurve als Schnitt der x, y -Ebene mit einer passenden Raumfläche $z = f(x, y)$ auffaßt und aus der Tangentialebene derselben die gesuchte Tangente ausschneidet.

196. Berechnen Sie formal die drei partiellen Ableitungen von

$$f(x, y, z) = x^3y^4z^5 \cdot \sin(x^6y^7z^8).$$

197. Bestimmen Sie die lineare Funktion g in drei Variablen, die die Funktion

$$f(x, y, z) = (1 - x^2y^3z^4) \cdot e^{5x-6y+7z}$$

lokal bei $(x, y, z) = (0, 0, 0)$ optimal approximiert.

Stundenplan für das Wintersemester 11/12

Die *Vorlesungsteile* **VO** und die *Übungsteile* **UE** der **VU 835.104** sowie der *Brückenkurs* **BK** (VO 835.091) werden nach folgendem Schema terminiert und portioniert. (Achtung: Die *letzte Übungseinheit* wird an einem *Donnerstag* abgehalten!)

| | |
|---------------------|-----------------------------------|
| UE 7. Okt | Aufgaben 1. UE-Einheit |
| BK 13. Okt | Kapitel I/II |
| UE 14. Okt | Aufgaben 2. UE-Einheit |
| BK 20. Okt | Kapitel IV |
| UE 21. Okt | Aufgaben 3. UE-Einheit |
| BK 27. Okt | Kapitel VII (Stetigkeit) und V/VI |
| UE 28. Okt | Aufgaben 4. UE-Einheit |
| BK 3. Nov | Kapitel VII (Integration) und IX |
| UE 4. Nov | Aufgaben 5. UE-Einheit |
| BK 10. Nov | Kapitel VIII |
| UE 11. Nov | Aufgaben 6. UE-Einheit |
| VO 18. Nov | Kapitel X/XI(1) |
| 18. November | ZWISCHENTEST |
| VO 24. Nov | Kapitel XI(2)/XII |
| UE 25. Nov | Aufgaben 7. UE-Einheit |
| VO 1. Dez | Kapitel XIII |
| UE 2. Dez | Aufgaben 8. UE-Einheit |
| UE 9. Dez | Aufgaben 9. UE-Einheit |
| VO 16. Dez | Kapitel XIV |
| UE 17. Dez | Aufgaben 10. UE-Einheit |
| VO 12. Jan | Kapitel XV (1) |
| UE 13. Jan | Aufgaben 11. UE-Einheit |
| VO 19. Jan | Kapitel XV (2) |
| UE 20. Jan | Aufgaben 12. UE-Einheit |
| VO 26. Jan | Kapitel XVI |
| UE 27. Jan | Aufgaben 13. UE-Einheit |
| UE 2. Feb | Aufgaben 14. UE-Einheit |
| 3. Februar | ABSCHLUSSTEST |

KURZFRISTIGE ÄNDERUNGEN VORBEHALTEN!